נקודת טוריצ'לי

נקודת טוריצ'לי – זו אחת הבעיות הגיאומטריות האהובות עליי. לכן אני אוסף את הפתרונות שלה, כרגע יש לי 6 פתרונות באוסף. לפעמים קוראים לה נקודת פרמה. כתוב בוויקיפדיה (ואת המקור לא קראתי) ***שפייר פרמה*** הציע את השאלה, ו***אוונג'ליסטה טוריצ'לי*** פתר אותה.

את הפתרונות הראשון והשני קראתי בגיליונות "קוואנט" ישנים (ברוסית), פתרון שלישי ברור לכל מי שלמד מתמטיקה באוניברסיטה, פתרון רביעי הומצא ע"י אלכסיי גלדקיך, פתרון חמישי שייך לאבא שלי, פתרון שישי נילקח ממאמרם של שני בולגרים ג. גנצ'ב, נ. ניקולוב שהתפרסם בשנת 2008 בגליון 12 של "השכל מתמטית", סדרה 3 ברוסית. אני מודה לאלכסיי זסלבסקי, שהראה לי את הפתרון השישי. לגבי פרונות 4 ו-5, יתכן שהם היו ידועים מקודם, הרי שאלה היא ישנה מאוד, ובמהלך 350 שנה הרבה אנשים יכלו לפתור אותה, לכן זה בלתי אפשרי לזהות את הממציא הראשון של רעיון כלשהו. ובכן:

בעיה. נתון משולש ABC. מצא נקודה T כזאת שסכום מרחקים ממנה עד קודקודי המשולש, AT+BT+CT תהיה קטנה ביותר.

התשובה מתפרקת לשני מקרים. המקרה הראשון, והוא פחות מעניין, זה כאשר למשולש יש זווית כהה במיוחד. כהה במיוחד, לפי הגדרה, מסמן $\geq 120°$. אז הקודקוד של הזווית הכהה היא הנקודה שמחפשים.

המקרא השני, שבו כל הזוויות קטנות מ-$120°$, מעניין יותר. במקרה זה הנקודה T מוגדרת ע"י התנאי: ממנה רואים את כל צלעות המשולש בזווית של $120°$, במילים אחרות $\measuredangle ATB = \measuredangle ATC = \measuredangle BTC = 120°$.

קל לבנות אותה. העניין הוא, שהמקום הגיאומטרי של נקודות שמהם רואים את קטע AB בזווית נתונה, זה קשת של מעגל שעובר דרך A ו-B. ידוע לנו, שנקודה נמצאת בתוך המעגל, לכן נשארנו אם קשת אחד. במקרה שלנו, זה המעגל החוסם של משולש שווה צלעות ABF, שנצמד למשולש ABC. ובכן, בונים על צלעות המשולש כלפי חוץ משולשים שווי צלעות, בונים את המעגלים החוסמים שלהם, ומסתכלים על קשתות המעגלים, שנמצאים בתוך המשולש המקורי. כל קשת כזאת מכילה את T. למעשה, אפשר להגדיר את T בתור נקודת חיתוך של כל שני קשתות כאלה. הרי אם רואים את שני הצלעות בזוויות של $120°$, אז עבור הצלע השלישית נשארת אותה הזווית. לכן 3 קשתות נחתכות בנקודה אחת, ומספיק לצייר רק שני מעגלים, כדי לבנות את נקודת טוריצ'לי.

למען שלמות בתמונה נתבונן קודם במקרה הראשון, הפחות מעניין, כדי שנוכל אחר כך לשכוח ממנו. נניח כי $\measuredangle ABC \geq 120°$. אז צריך להוכיח שלכל נקודה X, שהיא לא B

$$AB + CB < AX + BX + CX.$$

תהיינה נקודות P, Q הטלות של X לישרים AB, BC בהתאמה.

אם נקודה B נמצאת בין A ל-P, אז

$$AX > AP > AB$$
$$BX + CX > BC$$

מחברים את שני האי-שוויונים, מש"ל.

לכן המקרה היחיד שלא ברור הוא המקרה שבו P מצאת על קרן BA. מאותם הסיבות, אפשר להניח ש-Q מצאת על קרן BC. אז במרובע XPBQ זוויות P, Q ישרות, זווית P היא לפחות 120°, לכן זווית X היא לכל היותר 60° נוכיח כי

$$BX \geq BP + BQ \quad (*)$$

כאשר מוסיפים אליו אי-שוויונות ברורים

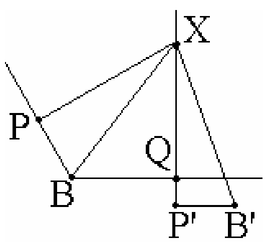
$$AX \geq AP$$
$$BX \geq BQ$$

נקבל את מה שרצינו. השוויון בשני האי-שוויונים האחרונים מתקיים רק כאשר X נמצאת על הישר AB והישר BC. ובכן, נשאר להוכיח את (*). נעשה את זה בשני דרכים:

דרך ראשונה. נדביק את המשולש B'XP', החופף למשולש BXP, למשולש BXQ, כך שיהיה לכם גבול משותף לאורך הישר P'QX. אז

$$\measuredangle P'XP = \measuredangle PXB + \measuredangle BXP' = \measuredangle P'XB' + \measuredangle P'XB = \measuredangle B'XB$$

לכן גם $\measuredangle B'XB \leq 60^\circ$, לכן B'B לא גדול יותר משני הצלעות האחרות של משולש B'XB, אבל $B'X = BX$ לכן $BX \leq B'B$.



נניח כי B'B חותך את הישר P'QX בנקודה K. אזי:

$$BX \geq B'B = BK + KB' \geq BQ + B'P' = BQ + BP$$

מש"ל.

דרך שנייה. תהיינה u,v וקטורי יחידה שמסתכלים מ-B לכיוונים של A, C בהתאמה. היות שהזווית ביניהם הוא לפחות 120°, אז סכומם הוא גם באורך 1 או אפילו יותר קצר. לפיכך

$$|BP| + |BQ| = (BX\ ,\ u) + (BX\ ,\ v) \leq (BX\ ,\ u + v) \leq BX\ .$$

מש"ל.

ובכן, נעבור לטענה המרכזית וששת ההוכחות שלה.

משפט (טוריצ'לי). אם מנקודה T בתוך משולש ABC רואים את כל הצלעות של המשולש בזוויות שוות, אז סכום המרחקים מ-T לקודקודי המשולש קטנה יותר, מאשר עבור כל הנקודה אחרת.

הוכחה ראשונה. אולי זו בעצם לא הוכחה, אלה הסבר אינטואיטיבי? תחליטו לבד, אבל אני אוהב אותה.

נניח שהמשולש מצויר על לוח אופקי. ליד כל נקודה הוברגה טבעת קטנה. דרך 3 הטבעות העבירו שרוך, וכשרו את 3 השרוכים בנקודה אחת בתוך במשולש. לקצוות המנוגדים של החוטים חיברו משקולות, שמשקליהם 1 ק"ג כל אחת. כעת נשחרר את המערכת, והי, לפי חוקי פיזיקה, תמצא את המצב בו אנרגיה הפוטנציאלית קטנה ביותר. אנרגיה פוטנציאלית זו סכום הגבהים של המשקולות. האנרגיה הפוטנציאלית קטנה ביותר, כאשר סכום אורכי השרוכים בין הטבעות למשקולות שמתחתיהם גדול ביותר. כלומר כאשר האורך בכולל של השרוכים בתוך המשולש, בין הטבעות לקשר, קטן ביותר. כלומר, מערכת פיסיקלית כזאת פותרת את השאלה שלנו.

מצד שני, במצב של שווי משקל סך הכוחות שפועלים על הקשר הוא 0. כוחות שפועלים על נקודת הקשר הם כוחות של מתיחות החוט, שמכוונים לאורך השרוך. מתיחות של כל חוט שווה למשקל של משקולת, כי מטיחות ומשקל מאזנים זה את זה מחזיקים את המשקולת במנוחה. כלומר כוחות הפועלים על הקשר, שלושה ווקטורים בעלי אותו האורך, נותנים סכום 0.

תרגיל 1. אם סכום של 3 ווקטורי יחידה יוצא 0, אז הזוויות ביניהם כולם $120°$.

מהשיקולים שהסברנו ומתרגיל 1 נובע שהזוויות בין השרוכים $120°$, מש"ל.

הוכחה שנייה. תהי X נקודה כלשהי. נתבונן בסיבוב מסביב נקודה A ב-$60°$ שמעביר את הנקודה B לנקודה F, רחוקה יותר מנקודה C. אותו הסיבוב יעביר את X לנקודה H. ברור כי משולשים ABF, AXH שווי צלעות, וכי $FH = BX$, הרי אותו הסיבוב מעביר את BX ל-FH. לכן $CF \le HX + FH + CX = AX + BX + CX$, כי הדרך הישרה מ-C ל-F, CF קצרה יותר מאשר הדרך לפי קו שבור CXHF.
השוויון יכול להתקיים רק אם הקו הישר זהה לקו השבור, כלומר נקודות H, X נמצאות על CF (כאשר X בין C ל-H). אז הזווית CXA משלימה ל-$180°$ את אחד הזוויות של משולש שווה צלעות, לכן היא $120°$. מסיבה דומה, גם FHA היא $120°$. אבל הסיבוב מעביר BXA היא FHA.

ובכן מקבלים את המינימום אך ורק כאשר $\measuredangle BXA=\measuredangle BXA=120°$. מש"ל.

כשמסתכלים בתמונה זו, אפשר להבין שיטות נוספות למצוא את נקודת טוריצ'לי. מהפתרון ברור, שנקודת טוריצ'לי נמצאת על CF, כאשר F – זה הקודקוד השלישי של משולש ABF, שנבנה על הצלע AB של משולש ABC כלפי חוץ. חוץ מזה, אורך הקטע CF שווה לאותו סכום המרחקים. משיקולים סימטריים לגמרי, אם נבנה משולשים שווי צלעות BCD, ACE כלפי חוץ, אזי הקטעים AD, BE יהיו באותו אורך ויעברו דרך נקודת טוריצ'לי. מהתכונה של טוריצ'לי מקבלים שהקטעים AD, BE, CF נחתכים בזוויות שוות. חוץ מזה, מקבלים שבנקודת טוריצ'לי נפגשים 6 קווים: המעגלים החוסמים של ABF, BCD, ACE והישרים AD, BE, CF. אפשר למצוא את נקודת טוריצ'לי בתור נקודת חיתוך של כל שני קווים מתוך השישה, למשל בתור חיתוך של שני ישרים.

תרגיל 2. יהיה KLM משולש שווה צלעות, Z נקודה על הקשת KM של המעגל החוסם. הוכח כי $ZK + ZM = ZL$.

הוכחה שלישית (מי שמפחד מנגזרות, שידלג). נתבונן בפונקציה על המישור $f(x,y)$.
גרדיינט שלה זה ווקטור שמורכב מנגזרות החלקיות.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix}$$

קל להבין, שגרדיינט מאונך לקווי רמה, מכוון לכיוון של עלייה המהירה ביותר של הפונקציה, ושווה באורכו לשיפוע של הגרף.

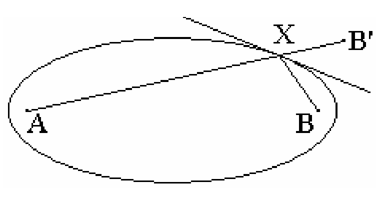
נתבונן בפונקצית מרחק מנקודה A, כלומר $f(X) = AX$. הגרדיינט שלה זו ווקטור יחידה שמכוון מהנקודה A לנקודה נתונה.
לכן הגרדיינט של פונקציה $AX + BX + CX$ שווה לסכום של 3 וקטורי יחידה, שמסתכלים בכיוונים CX ,BX ,AX. אנחנו רוצים למצוא את המינימום של הפונקציה הזאת. הגרדיינט בו מתאפס. לכן בנקודה הזאת סכום של שלושת ווקטורי היחידה 0. לפי תרגיל 1, זה קורא כאשר הזוויות בין הווקטורים $120°$.
כמובן, באופן כללי אם הגרדיינט שווה ל-0 זה עוד לא אומר שלפונקציה יש מינימום בנקודה נתונה (זה יכול להיות גם מקסימום, אוכף, או משהו יותר מתוחכם). אבל פונקציות CX ,BX ,AX קמורות, מזה נובע, שכאשר הגרדיינט שווה ל-0 זה בהכרח המינימום (הרי גרף של פונקציה קמורה נמצא תמיד מעל משיק).

עבור ***ההוכחה הרביעית*** נזדקק ל***תכונה האופטית של אליפסה***.

הגדרה. *אליפסה* – זה מקום גיאומטרי של נקודות X, כאלה שעבור שתי נקודות קבועות B ,A ומרחק קבוע $AB < l$ מתקיים: $AX + BX = l$.
הנקודות B ,A נקראות המוקדים של האליפסה.

משפט. תהי X נקודה על האליפסה, A ו-B מוקדי האליפסה. אז הקטעים BX ,AX חותכים את הישר המשיק לאליפסה בנקודה X בזוויות שוות.

למשפט זה יש כמה משמעויות פיסיקליות. למשל: כדור ביליארד, שיוצא ממוקד אחד של שולחן ביליארד אליפטי, כשהוא יוחזר מהדופן של השולחן, יעבור דרך המוקד השני. דוגמה אחרת: שני אנשים שנמצאים במוקדים שונים של כליפה אליפטית ענקית, יוכלו לדבר ללא רמקולים. כל אחד ישמע את מה שהשני אומר. דוגמה שלישית: אם נדליק נר בתוך מראה בצורה של קליפה אליפטית, נוכל לראות את הנר גם במוקד השני, הרי הקרניים שיוצאים מהמוקד הראשון יעברו גם דרך המוקד השני. כנראה שהשם למשפט בא מהדוגמה השלישית. עקב הטבע הגלי של אור וקול, עבור שני האפקטים האחרונים חשובה גם התכונה הראשונה של אליפסה, שלקחנו אותה בתור הגדרה. הקרניים שיוצאים מהמוקד הראשון לא דתם יעברו דרך המוקד השני, אלה גם יגיעו לשם באותה פאזה.



הוכחת התכונה האופטית. יהיו B ,A –מוקדים, X – נקודה על האליפסה. נעביר דרך X משיק לאליפסה, ונשקף את B יחסית למשיק, נקבל נקודה 'B. למעשה, צריך להוכיח ש-X נמצא על הקטע 'AB. נניח שלא.
תהיה T נקודת חיתוך בין המשיק לבין קטע 'AB. אז
$$AT + TB = AT + TB' < AX + XB' = AX + XB$$
לכן נקודה על המשיק נמצאת בתוך האליפסה, וזה שטות. מש"ל

הערה. השתמשנו באופן סמוי בקמירות האליפסה. את זה אפשר להסיק, למשל, מהמשפט הידוע, שאליפסה היא חתך של חרוט (לא נוכיח כאן את המשפט הזה). אבל אפשר לראות את זה גם מפונקציות קמורות. הפונקציה $f(X) = AX + XB$ היא פונקציה קמורה. והרי לכל פונקציה קמורה, קבוצה $\{ f(X) \le a \}$ היא קמורה.

הוכחה רביעית. תהי T – נקודה, שסכום המרחקים ממנה ל-3 הקודקודים מינימלי. נצייר מעגל שמרכזו C שעובר דרך T, וגם אליפסה בעלת מוקדים ב-A, B שעוברת דרך T.
אילו למעגל ולאליפסה הייתה נקודה פנימית משותפת X, אז היינו מקבלים $CT > CX$, $AT + BT > AX + BX$, לכן $AT + BT + CT > AX + BX + CX$ וזה לא יתכן.
לפיכך המעגל והאליפסה משיקים ב-T. המשיק המשותף יוצר זוויות שוות אם AT, BT ומאונך לרדיוס CT. לכן $\measuredangle ATC = \measuredangle BTC$.

באופן דומה מוכיחים כי $\measuredangle ATB = \measuredangle BTC$. מש"ל.

עבור ***הוכחה חמישית*** צריכים טענה.

טענה. תהי X נקודה בתוך משולש שווה צלעות KLM (או על צלע שלו). יהי h אורך הגובה של המשולש, k, l, m מרחקים מ-X לישרים LM, KM, KL בהתאמה.
אזי $k + l + m = h$.
אם X נמצאת מחוץ למשולש, אזי $k + l + m > h$.

הוכחת הטענה. תהי a אורך הצלע של KLM משולש, אז השטח שלו $ah/2$.
הוא מורכב ממשולשים XKL, XKM, XLM ששטחיהם $am/2$, $al/2$, $ak/2$, ולכן

$$\frac{ak}{2} + \frac{al}{2} + \frac{am}{2} = \frac{ah}{2} .$$

נשאר להכפיל את שני האגפים ב-2 ולחלק אותם ב-a.
כאשר X נמצאת מחוץ למשולש אז משולשים XKL, XKM, XLM עדיין מכסים את המשולש אבל מכילים גם שטח נוסף מחוץ לו, לכן במקום שוויון מקבלים אי-שוויון.

תרגיל 3. נקודות $A_1, A_2, ..., A_{2M}$ מחלקות את המעגל ל-2M קשתות שוות. X נקודה כלשהי בתוך העיגול. הקטעים $XA_1, XA_2, ..., XA_{2M}$ מחלקים את העיגול ל-2M חלקים. כל חלק נצבע בשחור או בלבן, כך שלכל שני חלקים צמודים הצבעים שונים. הוכח, שסכום השטחים השחורים שווה לסכום השטחים הלבנים.

הוכחה חמישית. תהי T נקודה בתוך ABC, שממנה רואים כל הצלע של ABC בזווית של $120°$. נעביר אנכים לישרים AT , BT , CT בנקודות A , B , C בהתאמה, ונקבל שלושה ישרים שיוצרים משולש שווה צלעות KLM.
נתבונן בנקודה X השונה מ-T. סכום המרחקים מ-X לצלעות של המשולש KLM הוא כמו עבור T, או אפילו יותר גדול. מרחקים מ-X לנקודות A , B , C יותר גדולים, מאשר לצלעות של KLM כי מרחק מ-X לישר גדול או שווה למרחק מ-X לנקודה מסוימת על הישר. לכן $AX + BX + CX > AT + BT + CT$.
האי-שוויון הזה יכול להפוך לשוויון אך ורק כאשר עקבי האנכים מ-X על צלעותיו של KLM הם A , B , C. אבל זה יתכן רק אם X נמצאת בו-זמנית על AT , BT , CT , כלומר כאשר X זה T.

תרגיל 4. $A_1A_2...A_N$ מצולע משוכלל, R רדיוס של המעגל החוסם שלו, X נקודה כלשהי. הוכח כי $XA_1 + XA_2 + \ldots + XA_N \geq N \cdot R$.

עבור הוכחה שישית נזדקק ל**הצמדה איזוגונלית**.
נניח שנתון לנו משולש ABC. כל נקודה במישור נקבעת ע"י שלישיית מספרים (x,y,z) :
המרחקים מהנקודה לישרים AB , BC , CA בהתאמה. מרחקים הם בעלי סימן – המרחק נחשב חיובי, אם הנקודה שלנו והקודקוד הנגדי של המשולש נמצאים באותו צד של הצלע, ושלילי אם הנקודות נמצאות בצדדים שונים של הישר.

תרגיל 5. היחס $x/k = y/l$ מגדיר ישר העובר דרך C.
תרגיל 6. היחס $x/k = y/l = z/m$ עבור k,l,m נתונים מגדיר נקודה. אם המספרים k,l,m חיוביים, אז הנקודה בתוך המשולש. לכן שלישיית המרחקים (x,y,z) מגדירה נקודה באופן יחיד. יתר על כך, לא כל שלישיית המרחקים (x,y,z) מגדירה נקודה, אלה רק כזאת שמקיימת $xa+yb+xc = 2S$ כאשר a,b,c צלעות המשולש, S שטחו.

אם פתרתם את שני תרגילים האחרונים (ולא שכחתם שנקודה יכולה להיות מחוץ למשולש), אז תוכלו להבין את ההגדרה הבאה בקלות.

הגדרה. נניח שמרחקים (בעלי סימן) מנקודה T לצלעות המשולש הם x,y,z ומרחקים (בעלי סימן) מנקודה N לצלעות המשולש הם k,l,m. אם $kx = ly = mz$ אז אומרים שנקודות N ו-T ***צמודות איזוגונלית*** זו לזו.

מתרגיל 6 ברור, שלכל נקודה שהיא לא על הצלעות של משולש יש בדיוק נקודה אחת שצמודה לה איזוגונלית. מההגדרה ברור, שזה יחס סימטרי בין הנקודות. מתרגיל 5 קל להבין, שהישרים AT, AN סימטריים זו לה זו ביחס לחוצה זווית של הזווית A של משולש ABC. באופן דומה, הישרים BT, BN סימטריים זו לזו ביחס לחוצה זווית של הזווית B, וישרים CT, CN סימטריים זו לזו ביחס לחוצה זווית של הזווית C.
מפה מתקבלת מסקנה שלא הייתה ברורה מלכתחילה:
נניח כי T היא לא קודקוד של משולש. אם משקפים את הישרים AT, BT, CT יחסית לחוצי זוויות מתאימות של משולש ABC, אז 3 הישרים שיתקבלו יחתכו בנקודה אחת (וזו הנקודה הצמודה איזוגונלית).
בדרך כלל לוקחים דווקא את התכונה הזאת בתור ההגדרה של הצמדה איזוגונלית.

תרגיל 7*. אליפסה שמוקדיה F, G חסומה במשולש. אז F, G צמודות איזוגונלית ביחס למשולש הזה.

טענה 2. נניח כי T, N צמודות איזוגונלית, K , L , M עקבי האנכים מ-N על הצלעות AB , AC , BC בהתאמה. אז הישר AT מאונך ל-LM, BT מאונך ל-KM, CT מאונך ל-KL.

הוכחה. מספיק להשתכנע ש-AT מאונך ל-LM, הטענות האחרות מתקבלות באותה דרך.
נניח כי AT, LM נחתכים ב-P. צריך להוכיח כי זווית APM ישרה, אבל הרי היא שווה לסכום הזוויות TAM ו-AML. זווית TAM שווה לזווית NAL. זווית AML שווה לזווית ANL (מפני שמרובע MALN חסום במעגל שקוטרו NA).
לכן צריך בעצם להוכיח שבמשולש NAL סכום הזוויות A, N היא $90°$, אבל הרי במשולש הזה זווית L ישרה, לכן זה ברור.

טענה 3. שטח של מרובע אינו עולה על מחצית מכפלת אלכסוניו. השוויון מתקיים אך ורק כשהאלכסונים מאונכים.

ההוכחה של טענה 3 היא תרגיל לקוראים.

הוכחה שישית. ובכן, תהי T נקודת טוריצ'לי, כלומר AT , BT , CT יוצרים זוויות של $120°$. נניח ש-N צמודה איזוגונלית ל-T, ויהיו K , L , M עקבי האנכים מ-N לצלעות BC , AC , AB בהתאמה.
לפי טענה 2, צלעות של משולש KLM מאונכות ל- AT , BT , CT ולכן הם יוצרים בינם זוויות של $60°$. כלומר KLM משולש שווה צלעות, נסמן ב-k את אורך הצלע שלו.
תהי X נקודה כלשהי. אז לפי טענה 3:

$$k\cdot(AX+BX+CX) = LM\cdot AX + KM\cdot BX + KL\cdot CX \geq$$

$$\geq 2(S_{LAMX} + S_{KBMX} + S_{KCLX}) = 2_{SABC}$$

השוויון מתקיים כאשר AX , BX , CX מאונכים ל-KL , KM , LM כלומר כשהם מתלכדים אם הישרים AT , BT , CT. כלומר כאשר X זו T. מש"ל.

תרגיל 8. צלעות של משולש הם a , b , c כאשר הצלע הקטנה ביותר היא a. מרחקים מנקודה פנימית לקודקודי המשולש הם p , q , r. הוכח כי $p + q + r < b + c$.

תרגיל 9. מצא נקודה במישור, שעבורה סכום המרחקים ל-4 נקודות נתונות מינימלי.
כדאי לפצל את הפתרון לשני מקרים, בהתאם לסוג של רביעיית הנקודות: מרובע קמור, ומשולש שמכיל נקודה פנימית.

הייתי רוצה להרחיב את האוסף שלי. אם תמצאו עוד הוכחה יפה של משפט טוריצ'לי, תשלחו אותו, בבקשה, לדוא"ל שלי levr78@hotmail.com .

רמזים לתרגילים בדף הבא:

1. נסובב את המישור כך שווקטור ראשון אופקי. אז קואורדינאטה *y* לווקטור שני ווקטור שלישי הפוכה. זה יכול להיות בשני מקרים : או שווקטור שני ושלישי הפוכים, או שהם יוצרים אותה זווית אם הווקטור הראשון. המקרה הראשון פסול, כי אם וקטור שני ושלישי מצטמצמים אז סכומם לא מנטרל את הווקטור הראשון. לכן הזוויות שוות.

2. נצייר על ZL נקודה X כך ש- ZK = ZX. אז המשולש ZKX הוא שווה צלעות, הרי גם זווית KZX הוא 60°. קל לראות שמשולשים KZM, KXL חופפים.
לכן ZL = XL + ZX = ZM + ZK.

3. צריך לבדוק, שאם נקודה X נמצאת בתוך המצולע שצלעותיו A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6... אז סכום השטחי המשולשים XA_1A_2, XA_3A_4, XA_5A_6... נשאר קבוע.

4. יהיו $v_1, v_2, \dots, v_N$ וקטורי יחידה שמסתכלים מ-O בכיוונים של $A_1, A_2, \dots, A_N$.
נניח גם ש-O זו ראשית הצירים. אז אפשר להעריך את אורכי הווקטורים ע"י מכפלות סקלריות:

$$XA_1 + XA_2 + \dots + XA_N \geq (XA_1\,, v_1) + (XA_2\,, v_2) + \dots + (XA_N\,, v_N) =$$
$$= (A_1\,,v_1) + (A_2\,,v_2) + \dots + (A_N\,,v_N) - ((X\,, v_1) + (X\,, v_2) + \dots + (X\,, v_N)) =$$
$$= (A_1\,,v_1) + (A_2\,,v_2) + \dots + (A_N\,,v_N) - (X\,, v_1 + v_2 + \dots + v_N) = N\cdot R$$

כמובן, אפשר גם להגיד במקום זה שפונקציה $XA_1 + XA_2 + \dots + XA_N$ קמורה, וגרדיינט ב-O הוא 0.

5. 6. אין רמזים, זה פשוט גם בלי רמז.

7. מספיק לבדוק את שוויון הזוויות באחד הקודקודים, לאחרים זה דומה.
למשל: מנקודה A העבירו שני משיקים לאליפסה, AK ו-AL, כאשר K, L נקודות השקה, F יותר קרוב ל-AK מאשר G. צריך להוכיח שזוויות KAF, GAL שוות.
נשקף כל מוקד ביחס למשיק הקרוב F יעבור ל-E, G יעבור ל-H. אז מספיק להוכיח את שוויון הזוויות הכפולות FAE, HAG. זה נובע מחפיפת משולשים GAF, HAE.

8. הפתרון המקורי: יהיו A , B , C קודקודי המשולש. פונקציה XA+XB+XC היא פונקציה קמורה. לכל הפונקציה קמורה במצולה קמור המקסימום מתקבל בקודקוד.

פתרון גיאומטרי (יוליה סמיקין):
טענה פשוטה. אם X נקודה על צלע BC של משולש ABC , $AB \geq AC$,
אז $AB > AX$.
לא נוכיח את הטענה.

נעביר דרך נקודה פנימית X קטע KL שמקביל ל-AC (כך ש-K על AB, L על BC) ודרך קטעת MN שמקביל ל-AB (כאשר M על AC, N על BC).
אז $CM > CX$, $BK > BX$ לפי טענה, ולפי אי-שוויון המשולש $AK + AM > AX$.
נשאר לחבר את האי-שוויונות.

9. במקרה שזה מרובע קמור יוצאת נקודת חיתוך האלכסונים וזה ברור לפי אי-שוויון המשולש. במקרה שזה משולש ונקודה בתוכו אז הנקודה הפנימית היא הנקודה שמחפשים.