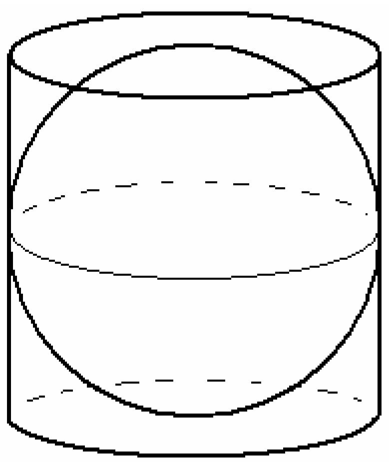
גיאומטריה של קליפה כדורית

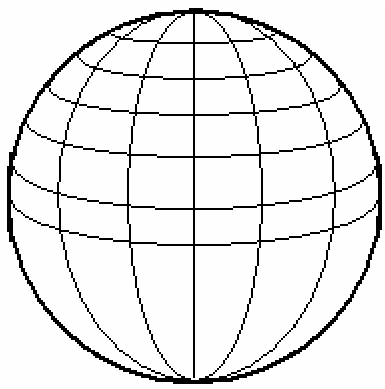
כמו שאפשר ללמוד גיאומטריה במישור, אפשר ללמוד גם גיאומטריה בקליפה הכדורית. קליפה כדורית היא המשטח של הכדור, כלומר מקום גיאומטרי של נקודות במרחב תלת-מימדי שנמצאים במרחק R מנקודה O. R נקרא רדיוס, O נקראת מרכז הכדור. קליפה כדורית זה משטח דו-מימדי (שנמצא במרחב תלת-מימדי) לכן גיאומטריה של קליפה כדורית דומה לגיאומטריה של מישור, אבל לא בדיוק- לגיאומטריה של קליפה כדורית יש תכונות קצת אחרות. לפעמים משתמשים במילה לועזית "ספרה" (sphere) עבור קליפה כדורית, ובמקום גיאומטריה כדורית אומרים "גיאומטריה ספרית".
כל עוד שלא נגיד אחרת, אנחנו נניח שרדיוס הקליפה הכדורית שווה 1.

שטח של כליפה כדורית ברדיוס 1 הוא 4π, ועבור רדיוס R כמובן נקבל פי R^2 יותר, כלומר $4\pi R^2$. לעובדה זאת יש הרבה הוכחת, למשל באמצעות אינטגרלים. אנחנו נביא הוכחה שתיתן לנו עוד משהו נוסף.



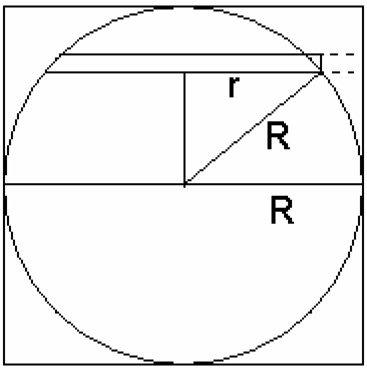
משפט 1. נחסום כדור בגליל אופקי.
אז למעטפת הצדדית של הגליל (הכירות שלו) יש אותו שטח כמו לקליפה הכדורית. יתר על כך, יש העתקה שומרת שטח שמעבירה את הקליפה הכדורית (פרט לקוטב דרומי וקוטב צפוני) לכירות של הגליל.
העתקה היא כזאת: לוקחים את הציר האנכי המשותף של כדור וגליל, ומעבירים קרניים אופקיים (מאונכים לציר) שמתחילים בנקודות על הציר.
עבור כל נקודה של כדור (פרט לקטבים) בוחרים קרן כזאת שעוברת דרכה, ומתאימים לה את נקודת חיתוך של הקרן עם הגליל. אז ההעתקה הזאת שומרת שטח.

כמובן, אורך של מעגל 2π, וגובה של גליל 2, ולכן שטח הגליל 4π.



נעביר מישורים דרך הציר ומישורים שמאונכים לציר. המישורים האלה חותכים את הקליפה הכדורית לאורך מעגלים (תמיד אם יש חיתוך בין מישור לקליפה כדורית, זה מעגל).
אם נעביר הרבה מאוד מישורים משני הסוגים, הקליפה הכדורית תתחלק למרובעים קטנים מאוד. עבור איזור קטן מאוד על הקליפה הכדורית, צורה שלו כמעט מישורית. במקרה שלנו אלה בעצם טרפזים קטנים מאוד, ואחרי העתקה שתיארנו טרפז קטן על הקליפה הכדורית יעבור למלבן קטן על הגליל. הטענה היא ששטח של מלבן קטן מאוד על הגליל שווה לשטח של טרפז קטן מאוד על הקליפה הכדורית.
ואז יש שוויון גם עבור השטח הכולל.

שטח של טרפז (כמו גם השטח של מלבן) שווה לגובה כפול רוחב, כאשר הרוחב זה אורך הקטע האמצעי. רוחב של טרפז הוא יותר קטן מרוחב המלבן, (כי ההעתקה שלנו מותחת מעגל אופקי קטן שאורכו r למעגל אופקי גדול שאורכו R) אבל הגובה של הטרפז יותר גדול, כי בזכות ההעתקה גובה שהיה משופע הופך לקטע אופקי ממש. ובכן היחס בין רוחב הטרפז לרוחב המלבן הוא $r : R$, והרי היחס בין גובה טרפז לגובה המלבן הוא $R : r$ (כי זה יחס בין יתר לניצב במשולש ישר זווית, שצלע אחת שלו אופקית וצלע שנייה - משיק לכדור, ומשולש זה דומה למשולש ישר זווית אחר שיתר שלו R וניצב r).



ובכן היחס בין השטחים הוא $(r : R) \times (R : r) = 1$.
כלומר יש שוויון.
(אם לא הבנת את ההוכחה, מומלץ לקרוא שוב ולנסות הפעם להפעיל דמיון בשביל לראות את התמונה המרחבית).

בעצם הוכחנו לא רק ששטח של כל הגליל שווה לשטח של כל הקליפה הכדורית אלה יותר. הרי העתקה שבנינו שומרת שטח באופן מקומי ולא רק באופן כולל. לכן שטח של כיפה כדורית הוא ביחס ישר לגובה שלה! ואותו דבר נכון לפס על כליפה כדורית בין שני מישורים מקבילים.
למשל אם שטח של כל הכדור הוא 4π, ונחתוך את הקליפה הכדורית באמצעות 4 מישורים מקבילים במרחק $\frac{1}{2}$ זו מזו או מהקטבים ל 4 חלקים בעלי אותו גובה : 2 "כיפות" ושני "צעיפים" אז לכולם יהיה שטח זהה - π.

בעיה 1. במישור יש כדור בעל קוטר d, ויש פסים N, כאשר כל פס זה חלק מהמישור בין שני ישרים מקבילים, אבל הפסים לאו דבקה מקבילים זה לזה. עובי של פס זה מרחק בין שני ישרים מקבילים שחוסמים אותו. הפסים הנתונים מחסים את כל השטח של העיגול הנתון, והם ברוחב $w_1 , w_2 , \ldots , w_N$.
יש למצוא את הערך המינימלי האפשרי של $w_1 + w_2 + \ldots + w_N$.

בעיה 2. נתון כדור כחול ועוד 15 כדורים לבנים באותו גודל. האם אפשר להדביק בו-זמנית את כל הכדורים הלבנים לכדור כחול ישירות?

פתרונות לבעיות מופיעים בסוף המאמר, אבל כבר יש לכם את כל הכלים לפתור אותם בשיטה די קצרה.

קליפה כדורית אינה מכילה ישרים, אבל יש בגיאומטריה כדורית מושג של "מעגל גדול" שמאוד מזכיר מושג של ישר במישור.

הגדרה. מעגל גדול זה קו החיתוך בין מישור שעובר דרך מרכז הכדור לבין הקליפה הכדורית

בעיה 3. להוכיח שדרך כל שני נקודות שונות על הקליפה הכדורית שהן לא נקודות מנוגדות על הקליפה עובר מעגל גדול אחד בדיוק.

אפשר להגיד, שמרחק כדורי בין שני נקודות שונות על הקליפה זה אורך הקשת הקצרה של מעגל הגדול שעובר דרך שני הנקודות. זה מוגדר ביחידות, לפי מה שהוכחת בבעיה 3, חוץ ממקרה אחד – כאשר הנקודות הן מנוגדות.
ברוב המקרים, כאשר שני נקודות לא מנוגדות, הנקודות מחלקות את המעגל הגדול שאורכו 2π, לשני חלקים, שאחד מהם קטן יותר, ולכן המרחק קטן מ-π.
במקרה שהנקודות מנודות, יש הרבה דרכים לבחור את המעגל הגדול שעובר דרכם, ובכל מקרה המעגל הגדול יתחלק ע"י שני נקודות לשני חלקים באורך π.

אפשר להגדיר את המרחק על הקליפה הכדורית גם בדרך אחרת. מרחק זה אורך של המסלול הקצר ביותר מהנקודה הראשונה הנקודה השנייה, כאשר המסלול נמצא בתוך הקליפה הכדורית.

מסתבר ששני ההגדרות שקולות. כלומר שהמסלול הקצר ביותר בין שני נקודות בקליפה הכדורית זה תמיד קשת של מעגל גדול. אנחנו לא נוכיח כאן את זה באופן מדויק, כי הוכחה מדויקת לא יכולה להיות אלמנטארית (צריך הרי להסביר מה זה אורך של מסלול עקום ולשם כך צריך להשתמש באינטגרלים).
אבל נסביר שני רעיונות שיכולים להוביל להוכחה.

שיטה אחת מסתמכת על כך שהמסלול הקצר ביותר מ-A ל-B צריך להיות כל הזמן מאונך למעגלים שמרכזם ב-A, כאשר מעגל זה מקום גיאומטרי של נקודות על הקליפה שנמצאות במרחק נתון מ-A. כלומר, אם אנחנו רוצים להגיע לנקודה B כמה שיותר מהר, צריך להתרחק מ-A במהירות המרבית.
נעביר ציר (ישר) דרך A ומרכז הכדור, ונעביר מישורים דרך הכדור שמאונכים לציר. המישורים האלה חותכים את הכדור לאורך מעגלים (לאו דבקה מעגלים גדולים), והמעגלים האלה הם מעגלים גם בגיאומטריה כדורית, אפילו לפי הגדרה שנייה. הרי אפשר לסובב את הכדור יחסית לציר שעובר דרך A, ולהביא נקודה כלשהי על מעגל מסוים לנקודה של אותו מעגל, בזמן ש-A יישאר במקום, והרי מרחק בין שני נקודות לא משתנה לאחר סיבוב!
עכשיו אנחנו מבינים, איך נראה מעגל בגיאומטריה כדורית (וזה נחמד).
כל לראות גם שמעגלים בקליפה כדורית שמרכזם A מאונכים לכל מעגל גדול שעובר דרך A, למשל, בעזרת שיקוף סימטרי לגבי מעגל גדול שעובר דרך A (כלומר שיקוף לגבי מישור שעובר דרך A).

שיטה אחרת להוכיח את שקילות של שני הגדרות המרחק זה להוכיח קודם את אי-שוויון המשולש בגיאומטריה הכדורית.
כלומר שאם יש 3 נקודות A, B, C על הקליפה הכדורית אז אורכי הקשתות של מעגלים גדולים מקיימים את אי-שוויון המשולש: $AB \le AC + BC$ (כאשר AB, AC, BC הם לא אורכי הקטעים הישרים במרחב, אלה אורכי הקשתות הקצרות של מעגלים גדולים).
יהי O מרכז הכדור. אפשר להוציא מנקודה O קרניים שעוברים דרך A, B, C. אז בעצם אורך הקשת AB של מעגל גדול שווה לזווית ברדיאנים בין הקרניים OA, OB.

לכן אפשר לראות את אי שוויון המשולש בגיאומטריה כדורית שהיא שאלה על גיאומטריה כדורית, בתור שאלה על גיאומטריה של המרחב – במקום לדבר על אורכי הקשתות אפשר לדבר על זוויות בין הקרניים.

בעיה 4. נתונות 4 נקודות במרחב O, A, B, C, כאשר O לא מתלכדת אם אף אחת מ-3 הנקודות האחרות. להוכיח כי $\measuredangle AOB \le \measuredangle AOC + \measuredangle COB$.
במילים אחרות, הוכח את אי-שוויון המשולש בגיאומטריה כדורית.

אני רוצה לתת לקורא לחשוב קצת לבד על השאלה הזאת, כי יש לה הרבה פתרונות. כמובן, בסוף המאמר יש פתרון לכל השאלות. פה אנחנו רואים נקודה מאוד מעניינת – לפעמים שאלות שכביכול לא קשורים לגיאומטריה כדורית, מדברים על משהו אלמנטארי לגמרי, בעצם קשורים לגיאומטריה של קליפות כדורית. הנה עוד שתי דוגמאות:

בעיה 5. נתון כי

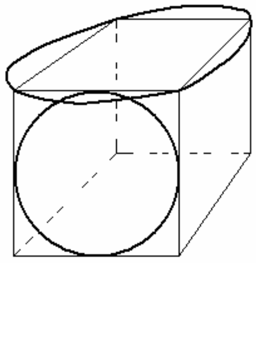
$$(a+b+c)(x+y+z) = 3\ ,\ (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4,$$

יש להוכיח כי $ax + by + cz \ge 0$.

שאלה זו הופיע ב-2006 באולימפיאדה ארצית ע"ש פרופ' י. גיליס במכון וייצמן ברחובות. המארגנים של התחרות לא ראו אותה כשאלה קשה במיוחד, אבל רק תלמיד אחד הצליח לפתור אותה בזמן התחרות.
את השאלה הבאה המצאתי בשביל שלב הגמר של אולימפיאדת אורנג' ב-2005, ואף תלמיד לא פתר אותה במהלך התחרות.

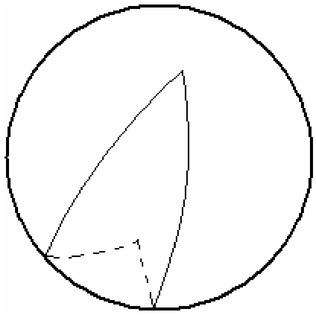
בעיה 6. נתונים שלושה מעגלים שונים במרחב תלת-מימדי: α, β, γ (לאו דווקא בעלי אותו רדיוס). נתון של β יש ארבע נקודות חיתוך שונות עם שני המעגלים האחרים. נתון של-α ו-γ יש נקודת חיתוך, שבה המעגלים α ו-γ נחתכים ולא משיקים. האם בהכרח יש ל-α ו-γ נקודת חיתוך נוספת? נמק את תשובתך.

בעיה 7. נתונה קוביה שאורך הצלע שלה 1. בוחרים שני פאות צמודות, באחת מהן לוקחים מעגל חסום ובשנייה – מעגל חוסם. מה המרחק בין שני המעגלים?
(המרחק בין שהי קבוצות זה המרחק המינימלי בין נקודה בקבוצה ראשונה לנקודה בקבוצה שנייה, כלומר בעצם שואלים מה המרחק הקטן ביותר בין נקודה של מעגל ראשון לנקודה של מעגל שני).



שאלה זאת הופיע לפני הרבה שנים באחת האולימפיאדות בברית המועצות.

עכשיו, כאשר אנחנו יודעים מה זה קו ישר במונחים של גיאומטריה כדורית נוכל להגיד מה זה משולש, מצולע, ולנסח ולהוכיח משפטים עליהם. למשל מצולע זה חלק מקליפה כדורית, שמוגבל ע"י קשתות של מעגלים גדולים, ומשולש כדורי זה מצולע כדורי שיש לו 3 צלעות. יש משפטים מאוד יפים בגיאומטריה כדורית, למשל על השטח של משולש. אבל לפני שנעבור לשטח של משולש נדבר על שטח של מצולע יותר פשוט וזה מצולע בעל שתי צלעות.



היות ואין בעברית שם למצולע בעל שתי צלעות בעברית, נשתמש במילה יוונית: דיגון. מצולע כזה לא קיים בגיאומטריה רגילה, אבל קל לבנות דיגון בגיאומטריה כדורית. צריך פשוט לקחת שתי נקודות מנוגדות על הכדור ולחבר אותם באמצעות שתי קשתות של מעגלים גדולים.
לדיגון יש שני זוויות, והן שוות (בגלל שזו צורה סימטרית יחסית למישור שמאונך לישר שמחבר את שני הקצוות שלו).

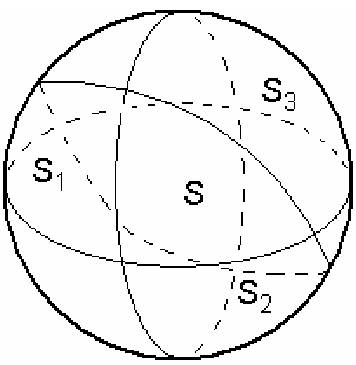
משפט. שטח של דיגון ששני זוויותיו שוות φ שווה ל- 2φ.

בהתחלה נוכיח את זה עבור מקרה שבו φ הוא כפולה רציונלית של 2π,
כלומר $\varphi = 2\pi \cdot m/n$.
אפשר לחבר את שני קצוות של הדיגון באמצעות n קשתות שיחלקו את הקליפה הכדורית ל-n חלקים שווים. לכן שטח של כל חלק יהיה $4\pi/n$, ודיגון שלנו מורכב מתוך m חלקים כאלה, לכן שטחו $4\pi \cdot m/n$.
כלומר למספרים רציונליים השטח שווה 2φ. לכן נוסחא זאת נכונה גם למספרים אי-רציונליים, כי שטח עולה כאשר הזוויות עולה ועבור כל מספר ממשי אפשר למצוא מספרים רציונליים קרובים משני הצדדים.

עכשיו הגענו למשפט מאוד יפה.

משפט. בגיאומטריה כדורית שטח של משולש שזוויותיו α, β, γ (ברדיאנים) שווה

$$\boxed{S = \alpha + \beta + \gamma - \pi}$$



הוכחה. נמשיך את הצלעות – יווצרו 3 מעגלי גדולים. המעגלים הגדולים מחלקים את הקליפה ל-8 משולשים. שיקוף לגבי מרכז הכדור מעביר כל מעגל גדול לעצמו, ולכן הוא מעביר כל אחד מ-8 משולשים למשולש אחר שנמצא ממול, לכן זוגות משולשים מנוגדים שווים. נסמן את שטח המשולש שממנו התחלנו S, ושטחי המשולשים שלידו S_1, S_2, S_3.
סה"כ קליפה מורכבת מ-8 משולשים ששטחיהם S, S_3 S_1, S_2, פעמים, לכן

$$4\pi = 2(S + S_1 + S_2 + S_3)$$

נצמצם 2 ונקבל

$$2\pi = S + S_1 + S_2 + S_3$$

מצד שני, כל שני משולשים צמודים, למשל S ו-S_1 יוצרים ביחד דיגון שזווית שלו שווה לזווית של משולש המקורי ולכן אפשר לחשב את שטחו לפי משפט על שטח דיגון שכבר הוכחנו. בצורה כזאת נקבל 3 נוסחאות:

$$2\alpha = S + S_1$$

$$2\beta = S + S_2$$

$$2\gamma = S + S_3$$

נחבר את שלוש משוואות אחרונות משוואות אחרונות

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 3S + S_1 + S_2 + S_3$$

אבל קיבלנו קודם $2\pi = S + S_1 + S_2 + S_3$, נחסיר ונקבל

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\pi = 2S$$

נשאר רק לחלק ב-2.

מהנוסחא שהוכחנו מקבלים מספר מסקנות מעניינות.
קודם כל, רואים שסכום הזוויות במשולש כדורי תמיד גדולה מ-π, הרי שטח חיובי. סכום הזוויות של משולש במישור לעומת זאת תמיד שווה ל-π. כלומר אפשר לנסח את הנוסחא שהוכחנו במילים בצורה כזאת:
סכום זוויות של משולש כדורי פחות סכום זוויות של משולש במישור שווה לשטח של משולש כדורי.

הגדרה. ***ליקוי*** *של מצולע כדורי בעל N צלעות זה סכום זוויותיו פחות סכום זוויות של מצולע מישורי בעל N צלעות.*
כלומר, המשפט הקודם אפשר לנסח גם כך: למשולש כדורי ליקוי = שטח.
אפשר להכליל את זה לכל מצולע.

משפט. *לכל מצולע כדורי ליקוי = שטח.*

משפט זה מתקבל בקלות מהמשפט הקודם, על המשולש. אפשר לחלק את המצולע באמצעות N-2 אלכסונים למשולשים. סכום הזוויות של משולשים יהיה שווה לסכום הזוויות של המצולע, גם בקליפה כדורית וגם במישור, לכן סכום הליקויים של המשולשים שווה לליקוי הכולל של המצולע.
והרי גם סכום שטחי המשולשים שווה לשטח של מצולע אותו הם מרכיבים.

בכל מקרה, שני משפטים אחרונים נראים מוזר מאוד. באגף אחד יש זוויות, באגף שני – שטח. זווית שווה לשטח. זה מוזר.
אנחנו יודעים מפיסיקה ומגיאומטריה שלא יתכן שוויון בין קילוגרמים לתפוזים ובין זווית לשטח. אז איך קיבלנו נוסחא כזאת?

לא כל הנוסחאות מקיימות את חוק היחידות, למשל: $\sin^2+\cos^2=1$ (בצד אחד יש יחידה, ובצד שני – חזקה שנייה), וזה בגלל שהנוסחא הטריגונומטרית מדברת על אורכי הקטעים במעגל יחידה. גם השטח של משולש כדורי – הנוסחא שרשמנו היא נכונה רק לקליפה של כדור היחידה (רדיוס 1). כמובן, אם ניקח רדיוס R ונבנה שם משולש דומה, בעל אותם זוויות נקבל

$$S = R^2\cdot(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

או באופן כללי , שטח של מצולע כדורי זה בעצם ליקוי כפול R^2.

ובכל זאת, הקשר בין זוויות לשטח הוא מוזר. אבל בעצם, אפשר להגיד ששטח כדורי זה זווית מסוימת.

נזכר בהגדרה של זווית במישור (ביחידות של רדיאנים). אנחנו לוקחים חלק מהמישור שחסום ע"י שני קרניים ולמדוד את הרוחב שלו. לשם כך אנחנו מציירים מעגל יחידה (שמרכזה בנקודת ההתחלה של הקרניים). חלק מהמישור מכיל רק קשת מהמעגל הזה. לפי הגדרה, אורך הקשת הוא גודל הזווית ברדיאנים ומדד לרוחב הזווית.

ננסה להכליל את המושג הזה למרחב תלת מימדי. נניח שאמי עומד בחדר שלי מול החלון ומסתכל בחלון. אפשר להגדיר את המושג של זווית ראייה או שדה ראייה שאני רואה מהחלון. אם אני מתקרב לחלון או אם יגדילו את החלון, שדה ראיה מתרחב. אבל אם חלון הוא צר יותר או שאני לוקח צעד אחורה אז שדה ראייה מצטמצם. אבל כיצד למדוד כמותית את זווית שדה הראייה?

אפשר לפרק מרחב כולו לקרניים שיוצאים מהעין שלי. לא כל הקרניים עוברים דרך החלון, אלה רק חלק מהם. אז אפשר לחשוב על אותו חלק של מרחב שהוא מורכב מהקרניים שכן עוברים דרך החלון. הנפח של החלק הזה הוא אינסופי, אבל אנחנו רוצים איכשהו למדוד את רוחב הזווית באופן כמותי.

לשם כך נצייר מסביב לעין שלי קליפה כדורית בעלת רדיוס 1. אותם קרניים שעוברים חלק מהחלון תופסים תחום על הקליפה הכדורית. שטח של התחום הזה הוא מספר סופי בין 0 ל-4π. וזה המדד ההגיוני לזווית ראייה מרחבית. יחידת מדידה היא סטרדיאן (כלומר הגרסה הסטריאומטרית, או המרחבית, של רדיאן). לכן בעצם שטח של מצולע כדורי זה זווית תלת-ממדית, וזה מסביר מבחינה אינטואיטיבית את הקשר שלו לזוויות.

בגיאומטריה כדורית יש עדו הרבה משפטים יפים אבל אנחנו נסביר רק עוד שני משפטים על משולש: משפט סינוסים כדורי ומשפט פיתגורס כדורי.

משפט סינוסים כדורי. יהיה ABC משולש על הקליפה הכדורית, אורכי צלעותיו (אורכי הקשתות הקצרות של מעגלים גדולים) הן $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, וזוויותיו $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle ACB$. אז מתקיים

$$\boxed{\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}}$$

כמובן, קודם צריך להבין כיצד להגדיר זווית במשולש כדורי או בין שני מעגלים גדולים. יש שני דרכים שקולות.

דרך ראשונה זה להעביר ישר משיק בנקודה משותפת לכל מעגל ולמדוד זווית בין משיקים. דרך שנייה היא להעביר 2 מישורים שמכילים את המעגלים הגדולים הנתונים ולמדוד את הזווית בינם.

קל לתרגם את המשפט הזה מלשון של גיאומטריה כדורית ללשון סטריאומטרי. יש 3 קרניים מאותה נקודה: OA, OB, OC.

$a = \measuredangle BOC$, $b = \measuredangle AOC$, $c = \measuredangle AOB$.

זווית בין המישורים OAC, OAB היא α.

זווית בין המישורים OBC, OAB היא β.

זווית בין המישורים OAC, OBC היא γ.

אז מתקיים השוויון $\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)}$.

כמובן בניסוח סטריאומטרי אפשר גם לא להניח ש $OA = OB = OC = 1$, אבל אפשר גם להניח את זה כדי לפשט את ההוכחה, זה לא חשוב.
נניח (ללא הגבלת הכלליות) כי $OA = 1$ ונוריד מ-A : אנך AP על קרן OB (כלומר P על OB), אנך AQ על קרן OC, ואנך AT למישור OBC (כלומר T במישור OBC). אז

$$\sin(b)\cdot\sin(\gamma) = AQ\cdot\sin(\gamma) = AT = AP\cdot\sin(\beta) = \sin(c)\cdot\sin(\beta)$$

ובאופן דומה מוכיחים $\sin(b)\cdot\sin(\alpha) = \sin(a)\cdot\sin(\beta)$.

מש"ל.

בגיאומטריה כדורית יש גם משפט קוסינוסים (בעצם, יש אפילו שני משפטי קוסינוסים) אבל הוא מהווה נוסחא קצת ארוכה ולכן אנחנו לא נוכיח אותו כאן. במקום זה נוכיח מקרה פרטי שלו.

משפט פיתגורס כדורי. יהיו a , b , c אורכי צלעותיו של משולש ישר זווית כדורי, צלע c מול זווית ישרה. אזי $\boxed{\cos(a) \cdot \cos(b) = \cos(c)}$.

אנחנו יודעים, שאם משולש מאוד קטן אז הוא כמעט מישורי, ולכן משפטים על המשולש הכדורי צריכים בגבול לשאוף למשפטים מגיאומטריה אוקלידית מישורית רגילה.
למשל משפט סינוסים, כאשר אורכי צלעותיו קטנים, הופך למשפט סינוסים רגיל בקירוב – הרי עבור מספרים קטנים $\sin(a) \sim a$.
המשפט על שטח המשולש והזוויות, עבור משולשים קטנים כאשר שטח המשולש בקירוב 0, הופך למשפט ידוע – סכום זוויות במשולש שווה π.

מה אם משפט פיתגורס? האם הנוסחא $\cos(a)\cdot\cos(b) = \cos(c)$ מזכירה עבור מספרים קטנים נוסחא ידועה $a^2 + b^2 = c^2$? כמובן שכן.

אנחנו לא נסביר את זה, אבל ניתן רמז – יש להשתמש בקירוב לקוסינוס עבור מספרים קטנים

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

כמובן, משפט מישורי לא יכול להיות הוכחה לגרסה כדורית שלו כי כדור זה לא מישור יש לו תכונות משלו. אבל להפך כן, משפט כדורי יכול להיות הוכחה לגרסה מישורית שלו. הרי אפשר להציג מישור בתור מקרה גבולי של כדור בעל רדיוס גדול מאוד.

ובכן, נוכיח משפט פיתגורס כדורי.
נסמן את קודקודי המשולש על הקליפה הכדורית A, B, C, ויהי O מרכז הכדור (כלומר 1 = OC = OB = OA), כאשר אורכי הקשתות הם a = BC, b = CA, c = AB.

נתון לנו כי מישורים OAC, OBC מאונכים. לכן AP אנך מ-A למישור OBC מצא בתוך מישור OAC. לכן עקב האנך, P נמצא על OC.
נעביר מישור דרך A שמאונך ל-OB. מישור זה גם מאונך למישור OBC, לכן הוא מכיל את OP. מישור זה חותך OB בנקודה Q. אז גם AQ וגם PQ מאונכים לישר OB. ובכן:

$$\cos(c) = OQ = OP \cdot (OQ/OP) = \cos(b)\cdot\cos(a)$$

מש"ל.

ב-2007, באולימפיאדה הארצית במתמטיקה ע"ש פרופ' יוסף גיליס במכון ויצמן הופיע שאלה מאת אלכסיי גלדקיך (שאלה שנייה), להוכיח זהות טריגונומטרית:

$$\arccos\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \arccos\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \arccos\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} = \pi$$

עבור $a,b,c > 0$.

זאת שאלה שאפשר לפתור אותה גם באמצעות טריגונומטריה, אבל יותר קל לפתור אותה בעזרת משפט פיתגורס כדורי. אנחנו נראה יותר מפתרון אחד בשביל שתוכלו להשוות.

פתרון טריגונומטרי ראשון. ברור שבתוך כל arccos יש מספר בין 0 ל-1, לכן התשובה היא זווית חדה. נסמן את המחוברים α,β,γ כלומר

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}, \cos(\beta) = \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}, \cos(\gamma) = \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

צריך להוכיח כי כלומר $\alpha+\beta = \pi-\gamma$. היות וקוסינוס מקבל כל ערך רק פעם אחד בין 0 ל-π אז מספיק לבדוק כי $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\gamma)$ כלומר

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) = -\cos(\gamma)$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}\sqrt{1-\cos^2(\beta)} = -\cos(\gamma)$$

נציב ונקבל שוויון (הבדיקה היא תרגיל עבור הקוראים).

פתרון טריגונומטרי שני. הפתרון הקודם הוא נכון וקל למציאה, אבל הוא לא סימטרי, לא אלגנטי ומכיל חישוב ארוך. פתרון יותר יפה מסתמך על

טענה. יהיו α,β,γ זוויות המשולש. אזי

$$\boxed{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)=\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)\cdot\tan(\gamma)}$$

הוכחה.

$$\tan(\gamma)=\tan\left(\pi-(\alpha+\beta)\right)=-\tan(\alpha+\beta)=-\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

זה שקול לנוסחא שרצינו להוכיח.

כמובן, הנוסחא מהווה גם תנאי מספיק לכך שזוויות יוצרות משולש (לפחות בתנאי שהן חדות), כי זווית בין 0 ל- π אפשר לבטא בתור פונקציה של טנגנס.

נקבל נוסחא של טנגנס כפונקציה של קוסינוס (לזוויות בין 0 ל- π)

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)}=\sqrt{\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}-1}$$

נציב לנוסחא שקיבלנו $\cos(\alpha)=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$.

$$\tan(\alpha)=\sqrt{\frac{1}{\cos^2(\alpha)}-1}=\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a^2}-1}=\frac{\sqrt{a^2+ab+ac+bc-a^2}}{a}=$$

$$=\frac{\sqrt{ab+ac+bc}}{a}=\frac{\sqrt{abc}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}{a}$$

באופן דומה

$$\tan(\beta)=\frac{\sqrt{abc}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}{b}$$

$$\tan(\gamma)=\frac{\sqrt{abc}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}{c}$$

ולכן

$$\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)=\sqrt{abc}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{abc}\right)^3}{abc}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)^3=\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)\cdot\tan(\gamma)$$

מש"ל.

פתרון השני, בניגוד לפתרון הראשון, מבוסס על חישוב יפה, קצר, וסימטרי.
אבל האם אפשר להוכיח זהות כזאת בלי חישובים בכלל, רק מתוך הסתכלות על התמונה?
התשובה היא כן, רק צריך לדעת משפט פיתגורס (כולל המקרה הכדורי).

פתרון סטריאומטרי. נבנה פירמידה ABCD בעלת זוויות ישרות ב-D, כלומר, שהקטעים AD, BD, CD יהיו מאונכים זה לזה, ובנוסף נדרוש שאורכיהם יהיו
$\mathrm{AD}=\sqrt{a}$, $\mathrm{BD}=\sqrt{b}$, $\mathrm{CD}=\sqrt{c}$.

אז לפי משפט פיתגורס (רגיל) $\mathrm{AB}=\sqrt{a+b}$, $\mathrm{AC}=\sqrt{a+c}$, $\mathrm{BC}=\sqrt{b+c}$

$$\cos(\mathrm{CAD})=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}\ ,\ \cos(\mathrm{BAD})=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$$

אבל מישורים CAD, BAD מאונכים, לכן, לפי משפט פיתגורס כדורי (כאשר מרכז הכדור הוא בנקודה A)

$$\cos(\mathrm{BAC})=\cos(\mathrm{CAD})\cdot\cos(\mathrm{BAD})=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$$

כלומר הזווית $\mathrm{BAC}=\arccos\dfrac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$.

באופן דומה, הזווית $\mathrm{ABC}=\arccos\dfrac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}$,

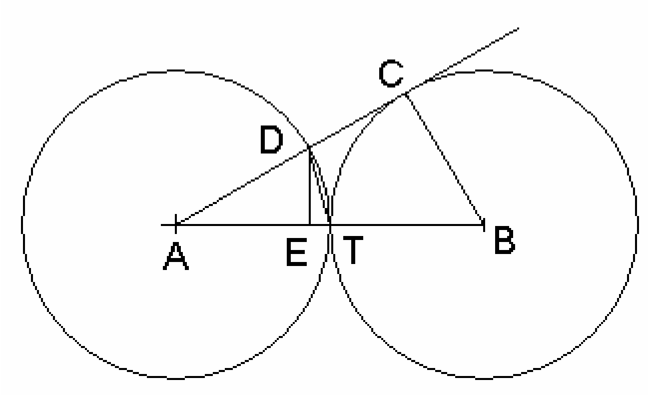
$$\mathrm{ACB}=\arccos\frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}.$$

לכן הביטוי המקורי (סכום של ארק-קוסינוסים) הוא שווה לסכום הזוויות במשולש מישורי ABC ! וזה π.

כמובן, אפשר לספר עוד הרבה על גיאומטריה של קליפה כדורית, אבל אנחנו נפסיק כאן את הסיפור ונעבור לפתרון בעיות.

בעיה 1. ברור שאם הפסים הם מקבילי וצמודים זה לזה אז קל להגיע למצב
שבו $w_1 + w_2 + . . . + w_N = d$. אבל האם אפשר פחות מ-d?
נצייר כליפה כדורית שיש לו מרכז ורדיוס כמו לעיגול הנתון.
עבור פס מספר k נעביר שני מישורים מאונכים למישור של העיגול שחותכים את המישור של העיגול לאורך שני הגבולות של הפס. בין המישורים האלה נוצרת שכבה תלת-ממדית. השכבה הזאת מכילה שטח של כליפה כדורית שהוא $2\pi R\cdot w_k$, ואולי אפילו פחות (השוויון מתקיים כאשר כל אחת מהגבולות של הפס נוגע בעיגול או חותך אותו),כאשר R הוא רדיוס של העיגול והקליפה.
היות ופסים מכסים את כל העיגול, אז השכבות שנוצרות מהם מכסות את כל השטח של הקליפה הכדורית, לכן סכום של $2\pi R\cdot w_k$ הוא לפחות כמו שטח של הקליפה כולה $4\pi R^2$ וזאת אומרת שסכום של w_k זה לפחות $d = 2R$.

בעיה 2. נצייר קרניים שיוצאים מהמרכז של הכדור הכחול ועוברים דרך כדור לבן מסוים שדבוק אליו. הם מכסים כיפה (עיגול כדורי) על כדור כחול ברדיוס נתון. נחשב את השטח שלו. שטח הוא ביחס ישר לגובה.
בציור יש שני עיגולים בעלי אותו רדיוס, שמרכזם A, B, הם משיקים ב-T
המשיק לעיגול השני (C נקודת ההשקה), שחותך את מעגל הראשון
בנקודה D, עקב האנך מ-D ל-AB הוא E. המשולשים ABC , ADE דומים כי הם ישרי זווית ויש להם זווית חדה משותפת A. חוץ מזה, $2BC = AB$, לכן $AC=\sqrt{3}\cdot AB$,
לכן $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}AD=\frac{\sqrt{3}}{2}R$, כאשר R הוא הרדיוס.



לכן שטח של כיפה כדורית חלקי שטח קליפה כדורית כולה היא

$$\frac{ET}{2R} = \frac{AT-AE}{2R} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

השטחים של כיפות כדוריות שנוצרו מכדורים לבנים שונים לא נחתכות ולא מכסות את כל הכדור, לכן כמות של כדורים לבנים אינה עולה על $\frac{4}{2-\sqrt{3}} = 4\left(2+\sqrt{3}\right) < 15$,
הרי $4\sqrt{3} < 7$.
ניוטון הניח שאפילו 13 כדורים באותו רדיוס אי-אפשר להדביק לכדור נתון, אבל הצליחו להוכיח את זה רק במאה ה-20.

בעיה 3. להוכיח שדרך כל שני נקודות שונות על הקליפה הכדורית שהן לא נקודות מנוגדות על הקליפה עובר מעגל גדול אחד בדיוק.
להעביר מעגל גדול דרך שני נקודות A, B על הקליפה הכדורית זה כמו להעביר מישור דרך 3 נקודות: A, B, O כאשר O זה מרכז הכדור.
על הישר OA יש רק שתי נקודות של הקליפה – A ונקודה מנוגדת. נתון לנו ש-B היא לא אחת משתי הנקודות הללו, לכן AOB לא נמצאים על ישר אחד, לכן עובר דרכם מישור אחד ויחיד.

בעיה 4. אפשר להניח שנקודות A ו-B לא מתלכדות ולא מנוגדות, אחרת הבעיה נהית פשוטה. לכן OA , OB אינם מקבילים.
אנחנו נוכיח את אי-שוויון המשולש בגיאומטריה כדורית, ולא את המשפט הסטריאומטרי.
כלומר, נניח שנקודות A, B, C נמצאות במרחק 1 מ-O.
נעביר מישור דרך C שמאונך ל-OA. מישור זה חותך את הקליפה הכדורית לאורך מעגל, שהוא המקום הגיאומטרי של הנקודות על הקליפה הכדורית נקודות X כאלה ש $\measuredangle AOX = \measuredangle AOC = \varphi$. ברור גם שנקודות X של הקליפה הכדורית שנמצאות באותו צד של המישור כמו A מקיימות $\measuredangle AOX < \varphi$.
באופן דומה נבנה מישור שעובר דרך C ומאונך ל-OB. המישור הזה גם יוצר מעגל ועיגול על הקליפה הכדורית, שהם המקום הגיאומטרי של נקודות כאלה ש מישור זה חותך את הקליפה הכדורית לאורך מעגל, שהוא המקום הגיאומטרי של הנקודות X על הקליפה הכדורית כאלה ש $\measuredangle BOX = \psi = \measuredangle BOC$, והחלק של הקליפה הכדורית שנמצא מסביב ל-B וחסום ע"י מעגל זה מהווה עיגול כדורי $\measuredangle BOX < \psi$.
נסובב את כל המרחב כך שהמישור OAB יהיה אופקי, ונסתכל על הציור מלמעלה. אז הקליפה הכדורית נראית כמו עיגול, המעגל הגדול שמכיל את הנקודות A ו-B הוא השפה של העיגול הזה, נקודה C היא נקודה בתוך העיגול, ושני מישורים שהעברנו דרך C נראים כמו ישרים (כי הם אנכיים).
המישורים (הישרים) האלה מחלקים את המרחב (וגם את מישור ההטלה) ל-4 חלקים. היות והם נחתכים בתוך העיגול, אז אפשר לבחור על המעגל נציג לכל אחד מ-4 החלקים, למשל אפשר לבחור נקודה שנמצאת באותו צד כמו A למישור שמאונך ל-OA, ובאותו צד כמו B ביחס למישור שמאונך ל-OB.
ובכן, אפשר לבחור נקודה D על המעגל הגדול שמכיל את A,B שמקיימת
$\measuredangle AOD \geq \varphi$, $\measuredangle BOD \geq \psi$, ולכן מספיק להוכיח כי עבור נקודה במישור AOB
$\measuredangle AOD + \measuredangle BOD \geq \measuredangle AOB$. פה יש 3 מקרים, וכולם ברורים:
א. הנקודה D נמצאת בתוך הזווית AOB, ואז $\measuredangle AOD + \measuredangle BOD = \measuredangle AOB$.
ב. אם הזווית $\measuredangle AOD$ או $\measuredangle BOD$ מכיל את הזווית $\measuredangle AOB$, אז הכל ברור.
ג. במקרה השלישי, 3 הזוויות מכילים ביחד את כל המישור.
אז סכום של הזוויות 2π, אבל $\measuredangle AOB \leq \pi$, לכן
$\measuredangle AOD + \measuredangle BOD \geq \pi \geq \measuredangle AOB$.

בעיה 5. נרכיב 2 ווקטורים $v = (a,b,c)$, $w = (x,y,z)$.
בעצם, מבקשים להוכיח שהזווית בין הווקטורים לא כהה.
מכפלת ריבועי הערכים המוחלטים שווה 4, לכן מכפלת הערכים המוחלטים 2.
אנחנו "ננרמל" את הווקטורים v,w, כלומר נחלק את כל הקואורדינטות של הווקטור בערך המוחלט שלו. לאחר "הנירמול" מקבלים תמיד ווקטור באותו כיוון כמו קודם אבל באורך 1. אז התנאי $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4$ כבר לא יתקיים: במקומו יתקיים $a^2+b^2+c^2 = x^2+y^2+z^2 = 1$.
התנאי השני $(a+b+c)(x+y+z) = 3$ גם ישתנה: חילקנו את הסוגר הראשון באגף שמאלי באורך של הווקטור הראשון, הסוגר השני באורך של הווקטור השני, כלומר סה"כ חילקנו במכפלת האורכים שהיא 2. כלומר התנאי החדש

$$(a+b+c)(x+y+z) = {}^3\!/_2$$

ניקח ווקטור חדש $u = (1, 1, 1)$. אז אפשר לנסח את התנאים כך :

$$|v| = |w| = 1$$

$$(u,v)\cdot(u,w) = {}^3\!/_2$$

כאשר (,) זו מכפלה סקאלרית. המספרים (u,w) , (u,v) שניהם בעלי אותו סימן, וניתן להניח בלי הגבלת הכלליות שהם חיובים (אחרת, אם שניהם שליליים אנחנו יכולים להחליף סימן גם לוקטורים v ,w בו-זמנית, כך נשמור על כל התנאים ועל הזווית בינם ונגיע למקרה החיובי).
את הזווית בין u ל-v נסמן φ, ואת הזווית בין u ל-w נסמן ψ. אז לפי ההנחה הזוויות φ, ψ חדות, ולפי אי-שוויון המשולש הכדורי (כלומר, בעיה 3 שכבר פתרנו) מספיק להוכיח כי $\varphi+\psi \le \pi/2$. ונתון לנו (התנאי של מכפלות סקלריות)

$$\sqrt{3}\cos(\varphi)\cdot\sqrt{3}\cos(\psi) = {}^3\!/_2$$

$\sqrt{3}$ מופיע כי זה האורך של ווקטור u. כלומר

$$\cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) = {}^1\!/_2$$

נשאר החלק הטכני להוכיח לכל שני זוויות חדות שמקיימות את זה שסכומם אינו עולה על $\pi/2$. זה קל. הרי מספיק לבדוק כי $\cos(\varphi+\psi)$ חיובי.

$$1 = 2\cos(\varphi)\cos(\psi) = \cos(\varphi+\psi) + \cos(\varphi-\psi)$$

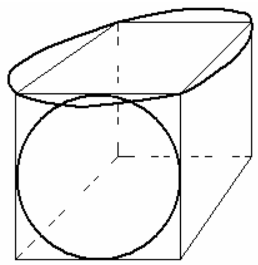
$$0 \le 1 - \cos(\varphi-\psi) = \cos(\varphi+\psi)$$

בעיה 6. נתונים שלושה מעגלים שונים במרחב תלת-מימדי: α, β, γ (לאו דווקא בעלי אותו רדיוס). נתון של β יש ארבע נקודות חיתוך שונות עם שני המעגלים האחרים. נתון של-α ו-γ יש נקודת חיתוך, שבה המעגלים α ו-γ נחתכים ולא משיקים. האם בהכרח יש ל-α ו-γ נקודת חיתוך נוספת? נמק את תשובתך.

נבנה קליפה כדורית או מישור שמכיל מעגל β וגם נקודת חיתוך של α ו-γ.

גם למעגל α, וגם למעגל γ יש 3 נקודות משותפות אם הקליפה הכדורית או המישור שבנינו. לכן שני המעכל נמצאים בתוך קליפה הכדורית או מישור שבנינו (הרי 3 נקודות מגדירות מעגל ביחידות). לכן α ו-γ נמצאים באותו מישור או באותה קליפה כדורית.

מעגל α מחלק את הקליפה הכדורית או את המישור שהוא נמצא בה/בו לשני חלקים, שנצבע אותם בשני צבעים – שחור ולבן. נבצע טיול על מעגל γ - נתחיל בחלק הלבן ונתקדם לקראת נקודת חיתוך של α ו-γ שנתונה לנו. נכנס לחלק השחור, ונמשיך את הטיול. מתישהו נצטרך שוב לצאת מחלק השחור ולחזור לחלק הלבן, לכן במהלך טיול מעגלי על מעגל γ נצטרך לחצות את מעגל α פעם נוספת. לכן אם יש ל-α ו-γ נקודת חיתוך אחת אז יש עוד אחת.



בעיה 7. נצייר שני קליפות כדוריות שמרכזם במרכז הקוביה, רדיוס של הראשונה $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ושל השנייה $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
הקליפה הכדורית הגדולה עוברת דרך כל הקודקודים של הקוביה ומכילה את המעגל הראשון, השנייה עוברת דרך אמצעי הצלעות של הקוביה ולכן מכילה את המעגל השני. קל לראות שמרחק בין שני קליפות כדוריות בעלות אותו מרכז שווה להפרש בין הרדיוסים (מדוע? רמז: אי-שוויון המשולש), כלומר במקרה שלנו המרחק הקצר בין שתי נקודות על הקליפות השונות הוא $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.
השוויון מתקיים, כאשר שני נקודות נמצאות על אותו קרן שיוצאת מהמרכז המשותף. האם במקרה שלנו יש שני נקודות על אותו קרן? כן.
נעביר קרן מהמרכז המשותף דרך הנקודה של המעגל הקטן שנמצאת גם על הפאה של מעגל הגדול (בציור- הנקודה העלינה של המעגל הקטן). הקרן חותכת את העיגול של המעגל הגדול. נתחיל לסובב את הקרן בהדרגתיות בכיוון כלשהו כך שהיא כל הזמן תעבור דרך נקודה מסוימת על המעגל הקטן. בשלב מסוים, למשל כאשר קרן מקבילה למישור של המעגל הגדול, הקרן כבר לא חותכת את העיגול של המעגל הגדול.
לכן במהלך הסיבוב חייב להיות רגע של מעבר, כזה שעד לרגע זה הקרן עדיין חותכת את העיגול של מעגל גדול ואחרי הרגע הזה – כבר לא. ברגע זה הקרן חותכת את שני המעגלים.