# קווטרניונים

יודעים מה זה שדה?

שדה $F$ הוא קבוצה עם פעולת חיבור ופעולת כפל, ומכיל שני איברים, שנקרא להם 1, ו-0. פעולות ומספרים אלו צריכים לקיים כמה תנאים:

א. שתי הפעולות חילופיות (קומוטטיביות): לכל $a, b \in F$, מתקיים: $a + b = b + a$, ו- $a * b = b * a$.

ב. שתי הפעולות קיבוציות (אסוציאטיביות): לכל $a, b, c \in F$, מתקיים: $(a + b) + c = a + (b + c)$, ו-$(a * b) * c = a * (b * c)$.

ג. חוק הפילוג: לכל $a, b, c \in F$, מתקיים, $a * (b + c) = a * b + a * c$

ד. 1 הוא ניטראלי לכפל: לכל $a \in F$ מתקיים $1 * a = a$.

ה. 0 הוא ניטראלי לחיבור: לכל $a \in F$ מתקיים $0 + a = a$.

ו. לכל $a \in F$ קיים $-a$ כך ש- $a+(-a)=0$.

ז. לכל $0 \neq a \in F$ קיים $a^{-1}$ כך ש- $a * a^{-1} = 1$.

$\mathbb{R}$ הוא שדה.

אנחנו יודעים איך בונים שדה ל- $\mathbb{R}^2$. שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$-. $i$ מוגדר להיות שורש של 1- וכל מספר ב-$\mathbb{C}$ ניתן להצגה כ-$a + ib$ כאשר $a$ ו-$b$ ממשיים. נשים לב ש- $\mathbb{C}$ מכיל את $\mathbb{R}$, ושכפל של איבר $z$ ב-$\mathbb{C}$ בממשי $a$, הוא אותו כפל כמו האיבר z ב- $\mathbb{R}^2$ בסקלר $a$. עוד אנחנו יודעים, שחיבור ב- $\mathbb{C}$ הוא אותו חיבור כמו ב- $\mathbb{R}^2$.

האם אפשר לבנות שדה שכזה ל- $\mathbb{R}^3$?

החיבור בשדה יהיה החיבור ב- $\mathbb{R}^3$, ולכן נותר לקבוע את הכפל. אילו מכפלות אנחנו מכירים ב- $\mathbb{R}^3$?

- מכפלה סקלרית: $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. היא לא תוכל להיות המכפלה בשדה הרצוי כי היא לא מחזירה ווקטור אלא סקלר.
- מכפלה ווקטורית: $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ הוא ווקטור שמאונך ל-$\overrightarrow{v_1}$ ול-$\overrightarrow{v_2}$ ואורכו כשטח המקבילית שהם יוצרים. אבל יש שניים כאלה, אז איזה אחד נבחר? נשתמש בחוק היד הימנית, שאומר: אם נחזיק את הישר שמאונך גם ל-$\overrightarrow{v_1}$ וגם ל-$\overrightarrow{v_2}$ ביד ימין, כך שהאצבעות יוצאות מכיוון $\overrightarrow{v_1}$ לכיוון $\overrightarrow{v_2}$, אז הכיוון של $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ הוא לכיוון האגודל. נשים לב שכאשר הווקטורים מקבילים אי-אפשר להגדיר את הישר שמאונך לשניהם. אבל אז אין בעיות, שטח המקבילית שיוצרים $\overrightarrow{v_1}$ ו-$\overrightarrow{v_2}$ הוא 0 ולא צריך לקבוע לו כיוון.

  בפרט, המכפלה הווקטורית $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_1}$ הינה ווקטור ה-0. אבל אם השדה היה מכיל את $\mathbb{R}$, 1*1 היה 0. וזה לא יתכן.

  סיבה נוספת היא שבגלל חוק היד הימנית, $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_1}$, כלומר, הפעולה הינה אנטי חילופית, ולא חילופית.

נכשלנו במציאת שדה ל- $\mathbb{R}^3$, אולי נצליח ל- $\mathbb{R}^4$?

כן!

כמעט. זה לא יהיה שדה מלא כי פעולת הכפל שלו לא תהיה קומוטטיבית. נקרא לו 'כמעט שדה' הקווטרניונים, $\mathbb{H}$.

והנה הוא:

כל קווטרניון מיוצג על ידי $a + ib + jc + kd$ כאשר $a, b, c, d$ ממשיים.

פעולת החיבור ברורה, $a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1 + a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2 =$
$a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + k(d_1 + d_2)$

כיצד נגדיר את פעולת הכפל (שהיא החלק מעניין)?

אני אגדיר את הכפל בין 1, $i$, $j$ ו-$k$, אגיד שכפל בסקלר הוא קומוטטיבי, (כלומר לסקלר $a$, ווקטור 4 ממדי $z$ נגיד ש-$az = za$) ונקבל את הכפל הכללי.

והנה לוח הכפל ש 1, $i$, $j$ ו-$k$ (כאשר המספר בעמודה נמצא מצד שמאל של הכפל, והמספר בשורה מצד ימין):

| $*$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $k$ | $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

ובאמצעותו אנחנו יודעים ש:

$$(a_1+ib_1+jc_1+kd_1)(a_2+ib_2+jc_2+kd_2)=$$

$$=\begin{matrix} a_1a_2 & +ia_1b_2 & +ja_1c_2 & +ka_1d_2 \\ +ib_1a_2 & -b_1b_2 & +kb_1c_2 & -jb_1d_2 \\ +jc_1a_2 & -kc_1b_2 & -c_1c_2 & +ic_1d_2 \\ +kd_1a_2 & +jd_1b_2 & -id_1c_2 & -d_1d_2 \end{matrix}=$$

$$=a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2+i(a_1b_2+a_2b_1+c_1d_2-d_1c_2)$$
$$+j(a_1c_2+c_1a_2-b_1d_2+d_1b_2)+k(a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2)$$

כעת נותר לבדוק את החוקים הנותרים שאמורים להתקיים על 'כמעט שדה' הקווטרניונים.

א. חילופיות חיבור – נכונה כי זה מרחב וקטורי, חילופיות הכפל – לא נכונה

ב. קיבוציות החיבור – נכונה כי זה מרחב וקטורי, קיבוציות הכפל :

עבור $a_1,a_i,a_ja_k,b_1,b_i,b_jb_k,c_1,c_i,c_jc_k$, ממשיים אוכיח כי:

$$\left(\sum_{m=1}^{k} ma_m \sum_{n=1}^{k} nb_n\right)\sum_{l=1}^{k} lc_l=\sum_{m=1}^{k} ma_m\left(\sum_{n=1}^{k} nb_n\sum_{l=1}^{k} lc_l\right)$$

(כאשר אני כותב ש-$m$ רץ מ-1 עד $k$ אני מתכוון שהוא הולך: $1,i,j,k$)

נשים לב שניתן לאחד סכומים:

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}(ma_mnb_n)lc_l=\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}ma_m(nb_nlc_l)$$

בגלל שיש חילופיות בכפל בסקלר נוכל להוציא את הסקלרים מהקיבוציות, כלומר:

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}(mn)la_mb_nc_l=\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}m(nl)a_mb_nc_l$$

וכעת נותר להוכיח שלכל $m,n,l\in\{1,i,j,k\}$ מתקיים $(mn)l=m(nl)$

וזוהי בדיקת מקרים פשוטה שלא תעשה פה.

ג. חוק הפילוג (בגלל ש-$\mathbb{H}$ אינו קומוטטיבי נצטרך להוכיח גם את החוק פילוג מימין, וגם את חוק הפילוג משמאל. פה נוכיח את השמאלי, והקורא יוכל להוכיח את השני):

עבור $a_1,a_i,a_ja_k,b_1,b_i,b_jb_k,c_1,c_i,c_jc_k$, ממשיים אוכיח כי:

$$\sum_{m=1}^{k} ma_m\left(\sum_{n=1}^{k} nb_n+\sum_{n=1}^{k} nc_n\right)=$$

$$\sum_{m=1}^{k} ma_m\sum_{n=1}^{k} nb_n+\sum_{m=1}^{k} ma_m\sum_{n=1}^{k} nc_n=$$

$$\sum_{m=1}^{k} ma_m\left(\sum_{n=1}^{k} nb_n+\sum_{n=1}^{k} nc_n\right)=$$

$$\sum_{m=1}^{k} ma_m\sum_{n=1}^{k} nb_n+nc_n=$$

$$\sum_{m=1}^{k} ma_m\sum_{n=1}^{k} n(b_n+c_n)=$$

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} mna_m(b_n+c_n) =$$

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} mna_m b_n + mna_m c_n =$$

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} mna_m b_n + \sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} mna_m c_n =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} ma_m \sum_{n=1}^{k} nb_n + \sum_{m=1}^{k} ma_m \sum_{n=1}^{k} nc_n$$

ד. $1$ ניטראלי לכפל – הטענה ברורה, למעשה, ברור גם שכפל בקווטרניון ממשי הוא אותו הכפל באותו ממשי כסקלר ב-$\mathbb{H}$ מרחב ווקטורי.

ה. $0$ ניטראלי לחיבור – נכון כי החיבור הוא חיבור של מרחב ווקטורי.

ו. לכל מספר $z$ קיים $z$– כזה ש- $z + (-z) = 0$. נכון מאותה הסיבה.

ז. לכל $a \in F \neq 0$ קיים יחיד $a^{-1}$ כך ש- $a * a^{-1} = 1$.

פה צריך לנחש. זוכרים את הופכי במרוכבים? לכל מספר מרוכב $z$ מתקיים, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. אולי זה יעבוד גם אצלנו?

נבדוק. נגדיר לקווטרניון $a + ib + jc + kd$ ש- $\overline{a + ib + jc + kd} = a - ib - ic - id$

נגדיר ל-$a + ib + jc + kd$ ש- $|a + ib + jc + kd| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

נבדוק מהו $\overline{a + ib + jc + kd} * (a + ib + jc + kd)$

$$= \big(a + (ib + jc + kd)\big) * \big(a - (ib + jc + kd)\big) =$$

$$a^2 - a(ib + jc + kd) + (ib + jc + kd)a - (ib + jc + kd)^2 =$$

כעת בגלל שכפל קווטרניון בסקלר הוא קומוטטיבי, המחובר השני והשלישי מצטמצמים.

$$= a^2 - (ib + jc + kd)^2 =$$

$$a^2 - (i^2b^2 + j^2c^2 + k^2d^2 + (ij + ji)bc + (jk + kj)cd + (ik + ki)bd) =$$

נשים לב ש-

$$ij = -ji$$
$$ik = -ki$$
$$kj = -jk$$

ולכן הם מצטמצמים מהמשוואה:

$$= a^2 - (i^2b^2 + j^2c^2 + k^2d^2)$$

נשים לב ש-$i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

נמשיך את השוויון:

$$= a^2 - (-b^2 - c^2 - d^2) =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$
$$= |a + ib + jc + kd|^2$$

ולכן באמת, לכל קווטרניון $z$ מתקיים:

$$z * \bar{z} = |z|^2$$

ולכן

$$z * \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

ולכן, ממש כמו במספרים מרוכבים, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

והוכחנו שהקווטרניונים הם כמעט שדה (אמנם נשארו לכם הוכחה או שתיים לקרוא, אבל הן משעממות, והטענות ברורות).

---

עכשיו אני אגלה לכם דרך אחרת להציג קווטרניון.
אנחנו יודעים ש-$i$, $j$ ו-$k$ הם ציקליים, אז אולי שווה לשים אותם בווקטור אחד.

את הקווטרניון $z = a + ib + jc + kd$ נגדיר להיות $z = a + v$ כאשר $v$ הוא הווקטור $(b, c, d)$ ב-$\mathbb{R}^3$.
את $a$ נסמן ב-$a = Re(z)$, החלק הממשי של קווטרניון $z$, ואת $v$ נסמן ב- $v = Im(z)$.
לאוסף הקווטרניונים $z$ בו $Re(z) = 0$ נקרא מספרים מדומים.
ועכשיו נראה איך עובדים חיבור וכפל בצורה החדשה.
טוב, חיבור הוא ברור, מחברים את הסקלר ומחברים את הקאורדינאטות של הווקטור. ומה עם כפל?

$$(a_1 + v_1) * (a_2 + v_2) =$$
$$\underbrace{a_1 a_2}_{\text{כפל שני סקלרים אנחנו מכירים אותו.}} + \underbrace{a_1 v_2 + a_2 v_1}_{\text{כפל סקלר בווקטור, יודעים איך הוא עובד.}} + \underbrace{v_1 v_2}_{\text{כפל ווקטור בווקטור צריך להבין איך הוא עובד.}}$$

עבור שני ווקטורים, $v_1 = ib_1 + jc_1 + kd_1$ ו-$v_2 = ib_2 + jc_2 + kd_2$.
מהו $v_1 v_2$?
$$v_1 v_2 = (ib_1 + jc_1 + kd_1)(ib_2 + jc_2 + kd_2)$$
$$= i^2 b_1 b_2 + j^2 c_1 c_2 + k^2 d_1 d_2 + ijb_1 c_2 + jic_1 b_2 + ikb_1 d_2 + kid_1 b_2 + jkc_1 d_2 + kjd_1 c_2$$
$$= -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + i(c_1 d_2 - d_1 c_2) + j(d_1 b_2 - b_1 d_2) + k(b_1 c_2 - c_1 b_2)$$
נשים לב שהחלק הממשי הוא $-\langle v_1, v_2 \rangle$, מינוס המכפלה הסקלרית.
החלק המדומה, שהוא: $Im(v_1 v_2) = (c_1 d_2 - d_1 c_2, d_1 b_2 - b_1 d_2, b_1 c_2 - c_1 b_2)$, אולי הוא המכפלה הווקטורית?
נבדוק. תחילה נבדוק אם הוא מאונך לשניהם.
$$\langle (c_1 d_2 - d_1 c_2, d_1 b_2 - b_1 d_2, b_1 c_2 - c_1 b_2), (b_1, c_1, d_1) \rangle$$
$$= b_1 c_1 d_2 - b_1 d_1 c_2 + c_1 d_1 b_2 - c_1 b_1 d_2 + d_1 b_1 c_2 - d_1 c_1 b_2$$
והוא מאונך ל-$v_1$. נשים לב ש-$Im_{v_1 v_2}$ אנטי סימטרי ביחס ל-$v_1$ ו-$v_2$, ולכן $Im(v_1 v_2)$ מאונך גם ל-$v_2$.
נוכיח ש-$|Im(v_1 v_2)| = sin(v_1, v_2)\, |v_1||v_2|$
או - $|Im(v_1 v_2)|^2 = sin(v_1, v_2)^2\, |v_1|^2 |v_2|^2$
ממשפט פיתגורס נצטרך להוכיח- $|Im(v_1 v_2)|^2 = (1 - cos(v_1, v_2)^2)|v_1|^2 |v_2|^2$
אנחנו יודעים ש- $cos(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1||v_2|}$,
ולכן צריך להוכיח: $\left|Im_{v_1 v_2}\right|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle^2}{|v_1|^2 |v_2|^2} |v_1|^2 |v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$
כלומר: $\left|Im_{v_1 v_2}\right|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle^2 = |v_1|^2 |v_2|^2$
אבל $Im_{v_1 v_2} + \langle v_1, v_2 \rangle = v_1 v_2$
ולכן, בגלל ש-$Im_{v_1 v_2}$ ו-$\langle v_1, v_2 \rangle$ מאונכים, $\left|Im_{v_1 v_2}\right|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle^2 = |v_1 v_2|^2$
ולכן יש להוכיח, $|v_1 v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2$, וזה משפט בפני עצמו.

למה: לכל שני קווטרניונים $z_1, z_2$, מתקיים $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$.
נזכר ש-$|z|^2 = z\bar{z}$.
לכן צריך להוכיח: $z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 \stackrel{?}{=} z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}$.
נוסיף סוגריים- $z_1 \bar{z}_1 (z_2 \bar{z}_2) \stackrel{?}{=} z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}$.
$|z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2$ וזה סקלר, ולכן ניתן להעביר את $\bar{z}_1$ לצד השני שלו,
$$z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = z_1 z_2 \bar{z}_2 \bar{z}_1 \stackrel{?}{=} z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}$$
נוכל לחלק בצד שמאל ב-$z_1 z_2$ ולקבל: $\bar{z}_2 \bar{z}_1 \stackrel{?}{=} \overline{z_1 z_2}$.
נסמן: $z_1 = a_1 + v_1$, ו- $z_2 = a_2 + v_2$, כאשר $v_1, v_2$ הם ווקטורים ו-$a_1, a_2$ הם סקלרים.
$$\bar{z}_2 \bar{z}_1 = \overline{(a_2 + v_2)}\ \overline{(a_1 + v_1)} = (a_2 - v_2)(a_1 - v_1) = a_1 a_2 - a_1 v_2 - a_2 v_1 + v_2 v_1$$
$$= a_1 a_2 - a_1 v_2 - a_2 v_1 + Im_{v_2 v_1} - \langle v_1, v_2 \rangle$$
$$= \overline{a_1 a_2 + a_1 v_2 + a_2 v_1 - Im_{v_2 v_1} - \langle v_1, v_2 \rangle}$$
בגלל ש $Im$ הוא אנטי סימטרי $Im_{v_2 v_1} = -Im_{v_1 v_2}$ ולכן הביטוי למעלה שווה ל-

$$= \overline{a_1a_2 + a_1v_2 + a_2v_1 + Im_{v_1v_2} - \langle v_1, v_2\rangle} = \overline{a_1a_2 + a_1v_2 + a_2v_1 + v_1v_2} = \overline{z_1z_2}$$

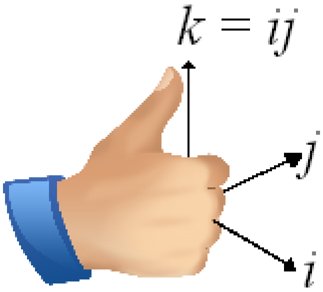
ולכן $\bar{z}_2\bar{z}_1 = \overline{z_1z_2}$.

ולכן $|z_1||z_2| = |z_1z_2|$.

שזה מה שרצינו להוכיח בלמה.

הצלחנו להוכיח ש-$|v_1v_2|^2 = |v_1|^2|v_2|^2$. ולכן $Im_{v_1v_2}$ הוא $v_1 \times v_2$.

(עד כדי חוק היד הימנית. אבל נוכל לסדר את $i$ $j$ ו-$k$ כך שהוא יתקיים עבורם, ולכן בגלל רציפות הוא מתקיים תמיד. )




---

עד כה חוסר החילופיות של הכפל הפריע לנו. בואו נראה איך אפשר להרוויח ממנו. איזה ביטוי חוסר החילופיות משפיע בו? נבחר קווטרניון $q$, ונתבונן בפונקציה: $f_q\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $f_q(z) = qzq^{-1}$.

$f_q$ מורכבת משתי הכפלות בקבוע, ימנית ושמאלית. קל לראות ששכל הכפלה בקבוע היא לינארית, ולכן $f_q(z)$ היא ליניארית.

נשים לב ש-

$$|f_q(z_1) - f_q(z_2)| = |qz_1q^{-1} - qz_2q^{-1}| = |q(z_1q^{-1} - z_2q^{-1})| = |q(z_1 - z_2)q^{-1}|$$
$$= |q||q^{-1}||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$$

ולכן $f_q(z)$ לא רק לינראית אלא גם סיבוב. אבל 'סיבוב' אינו אומר הרבה.יש מספר גדול מאוד של סיבובים ב-$\mathbb{R}^4$.

אם נוכל למצוא נקודות שבת ל-$f_q(z)$ יהיה יותר קל לעבוד איתה.

א. לכל $a$ סקלר, $f_q(a) = qaq^{-1} = a$.

ב. לכל $a$ סקלר, $f_q(aq) = qaqq^{-1} = aq$

בגלל ש-$f_q$ זהות על הממשיים, והיא סיבוב, אז המרחב של הקווטרניונים שמאונכים לממשיים, כלומר, המדומים, עובר לעצמו.

ומצאנו שיטה לקבל סיבובים ב-$\mathbb{R}^3$ באמצעות קווטרניונים, $f_q|_{\text{מדומים}}$. האם אלה כל הסיבובים? האם כל סיבוב מתקבל פעם אחת? מיד נדע.

לכל סקלר $a$, מתקיים $f_{aq} = f_q$. כל סיבוב מתקבל מספר רב של פעמים. אבל אם ניקח $q$ כזה ש-$|q| = 1$, נדע שיש לפחות פעמיים כל סיבוב ($q$ ומינוס $q$). אראה שיש כך בדיוק פעמיים כל סיבוב. נציג את $q$ כ-$cos\alpha + vsin\alpha$.

אם הייתי יודע ש-$v = i$ היה לי קל לחקור את $f_q$:

אני אחשב כמה מסתובב $j$ ב-$f_q$, וזה (בגלל ש-$j$ מדומה ומאונך ל-$i$)יהיה זווית הסיבוב של $f_q$.

$$f_q(j) = qj\bar{q} = (cos\alpha + isin\alpha)j(cos\alpha - isin\alpha)$$
$$= j\cos^2\alpha - jicos\alpha sin\alpha + ijcos\alpha sin\alpha - ijisin^2\alpha$$
$$= j(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + 2ijcos\alpha sin\alpha = jcos2\alpha + ijsin2\alpha$$

כלומר, במקרה זה, היא סיבוב ב-$2\alpha$ בכיוון חוק היד הימנית ($i$ הוא האגודל, $j$ היא האצבע הראשונה, $f_q(j)$ היא האצבע השנייה).

אם נמצא אוטומורפיזם שהוא סיבוב שמעביר את $v$ ל-$i$, נוכיח שתמיד (לכל $v$) $f_q$ היא סיבוב ב-$2\alpha$. נבחר וקטור $u$ מאונך ל-$v$. נסמן $w = vu$. קל לראות שלוח הכפל בין $1$, $v$, $u$ ו-$w$, זהה ללוח הכפל בין $1$, $i$, $j$ ו-$k$. (כשמחליפים את $v$ ב-$i$, את $u$ ב-$j$ ואת $w$ ב-$k$). ולכן ההעתקה: $g(a+bi+cj+dk) = a+bv+cu+dw$ שומרת כפל. מצד שני, היא לינארית, ולכן שומרת חיבור, מצד שלישי, בתור העתקה לינארית, היא אורתוגנלית, ולכן סיבוב. ולכן g היא אוטומורפיזם סיבוב שהופך את $v$ ל-$i$, ולכן תמיד $f_q$ היא סיבוב ב-$2\alpha$. נראה שכל סיבוב הוא אחד מ-$f_q$. ויותר מכך, כל אוטומורפיזם הוא אחד מ-$f_q$.

קל לראות ש-$f_q(z)$ היא אוטומורפיזם כלומר, העתקה מה-'כמעט שדה' לעצמו ששומרת על כל תכונותיו, חיבור וכפל -

חיבור - $f_q(z_1+z_2) = q(z_1+z_2)q^{-1} = qz_1q^{-1} + qz_2q^{-1} = f_q(z_1) + f_q(z_2)$.

כפל - $f_q(z_1z_2) = f_q(z_1z_2) = qz_1z_2q^{-1} = qz_1q^{-1}qz_2q^{-1} = f_q(z_1)f_q(z_2)$

ונראה שאין אוטומורפיזמים אחרים.

כעת נראה אילו תכונות אוטומורפיזם על $\mathbb{H}$ חייב לקיים.

אם $g: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ אוטומורפיזם, נתבונן בתכונה של קווטרניון $q$, $\left(f_q = Id\right)$. זוהי תכונה שתלויה אך ורק בכפל, ולכן נשמרת באוטומורפיזם. ברור שהתכונה נכונה לכל $q \in \mathbb{R}$. אראה שלכל קווטרניון $q$, אם $Im(q) \neq 0$ (או $q \notin \mathbb{R}$) התכונה אינה מתקיימת. נבחר וקטור $v$ מאונך ל-$Im(q)$, נראה ש$\frac{qv\bar{q}}{|q|^2}$ אינו $v$ ולכן $qvq^{-1}$ גם כן אינו מקביל ל-$v$ ולכן אינו $v$.

$$\begin{aligned}
qv\bar{q} = \big(Re(q)+Im(q)\big)v\big(Re(q)-Im(q)\big) \\
&= Re(q)^2v - Re(q)vIm(q) + Im(q)vRe(q) - Im(q)vIm(q) \\
&= Re(q)^2v + Re(q)\big(Im(q)v - vIm(q)\big) - Im(q)vIm(q) \\
&= Re(q)^2v + Re(q)(Im(q)\times v - \langle Im(q),v\rangle - v\times Im(q) + \langle Im(q),v\rangle) \\
&\quad - Im(q)vIm(q) \\
&= Re(q)^2v + Re(q)(Im(q)\times v + Im(q)\times v) - Im(q)vIm(q) \\
&= Re(q)^2v + 2Re(q)Im(q)\times v - Im(q)vIm(q)
\end{aligned}$$

$$Im(q)vIm(q) = (Im(q)\times v - \langle Im(q),v\rangle)Im(q) = (Im(q)\times v)Im(q)$$

$Im(q)\times v$ הוא וקטור מאונך ל-$Im(q)$ מתוך הגדרה, ולכן מכפלתם כקווטרניונים תהיה וקטור שמאונך לשניהם ($v$). (בדיקה פשוטה של חוק היד הימנית מאוששת ששום סימן לא מופיע). ולכן,

$Im(q)vIm(q) = |Im(q)|^2v$, ולכן:

$$\begin{aligned}
qv\bar{q} &= Re(q)^2v - |Im(q)|^2v + 2Re(q)(Im(q)\times v) \\
&= (Re(q)^2 - |Im(q)|^2)v + 2Re(q)(Im(q)\times v)
\end{aligned}$$

אם $Re(q)$ שונה מ-0,אזי $qv\bar{q}$ הינו כפולה של $v$ בסקלר, ועוד תוספת לא אפסית של וקטור שמאונך ל-$v$, ולכן אינו מקביל ל-$v$ ולכן$qvq^{-1} = \frac{qv\bar{q}}{|q|^2}$ אינו מקביל ל $v$ ולכן שונה ממנו.

אם $Re(q)$ שווה 0 אזי $qv\bar{q} = -|Im(q)|^2v = -(Re(q)^2 + |Im(q)|^2)v = -|q|^2v$

ולכן $qvq^{-1} = -v \neq v$.

ולכן, לכל אוטומורפיזם $g$, מתקיים: $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. נשים לב ש-$g|_{\mathbb{R}}$ היא אוטומורפזם על הממשיים. בגלל של-$\mathbb{R}$ יש אוטומורפיזם אחד, הזהות, מתקיים, שלכל סקלר $a$, $g(a) = a$. ולכן לכל קווטרניון $q$, מתקיים, $ag(q) = g(a)g(q) = q(aq)$

ואנו רואים ש-$g$ לינארית.

נתבונן בתכונה של קווטרניון z, $z^2 \in \mathbb{R}, z^2 \leq 0$ . קל לראות שתכונה זו היא התכונה 'מדומה':

$$(a+v)(a+v) = a^2 + 2av + v^2 = a^2 + 2av + v\times v - \langle v,v\rangle$$

החלק המדומה של זה הוא $2av$, ולכן נקבל: $2av = 0$. אם $a = 0$ נקבל $(a+v)(a+v) = -\langle v,v\rangle \leq 0$

אם $a \neq 0$ אז $v = 0$ ו-$(a+v)(a+v) = a^2 > 0$, סתירה.

ולכן, רק קווטרניונים מדומים מקיימים את התכונה $z^2 \in \mathbb{R}, z^2 \leq 0$.

נשים לב שהאוטומורפיזם $g$ שומר על התכונה: אם $z^2 \in \mathbb{R}, z^2 \leq 0$ אז עבור $g(z)^2 = g(z^2)$ מתקיים, בגלל ש-$z^2$ ממשי, $g(z^2) = z^2$, ולכן $g(z)^2 = z^2 \leq 0$. ולכן $g$ שומרת על הצמדה:

$$\overline{g(a+v)} = \overline{g(a)+g(v)} = g(a) - g(v) = g(a-v) = g(\overline{a+v})$$

ולכן $g$ שומרת על אורך קווטרניון:

$$|g(z)|^2 = g(z)\overline{g(z)} = g(z)g(\bar{z}) = g(z\bar{z}) = g(|z|^2) = |z|^2$$

ולכן $g$ היא סיבוב או היפוך. אבל היא לא היפוך כי היפוך לא שומר על חוק היד הימנית ואילו פונקציה ששומרת על כפל אמורה לשמור על החוק.

נתבונן בסיבוב על המדומים ($\mathbb{R}^3$) ונבחר ווקטור $v$ על ציר הסיבוב באורך אחד ($|v| = 1$) נקרא לזווית הסיבוב $2\alpha$ . נקבל ש-$g = f_{cos\alpha+vsin\alpha}$.

**נספח**

- ל-$\mathbb{R}$ יש אוטומורפיזם אחד, הזהות.

<u>הוכחה:</u>

יהי $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, אוטומורפיזם.

1 הוא המספר הניטראלי לכפל היחיד, ולכן $g(1) = 1$.

ולכן לכל טבעי $n$, מתקיים:

$g(n) = g(1 + 1 + \cdots + 1) = g(1) + g(1) + \cdots + g(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$.

ולכן לכל רציונאלי חיובי, $\frac{p}{q}$ מתקיים, $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{g(p)}{g(q)} = \frac{p}{q}$.

ולכן לכל רציונאלי שלילי $-q$, מתקיים $g(-q) = -g(q) = -q$ (כאשר '–' היא הפעולה ההפוכה לחיבור).

עבור $x$, התכונה "קיים ל- $x$ שורש ריבועי" היא תכונה שמוצגת ע"י אריתמטיקה של שדה, ולכן $g$ שומרת עליה, מצד שני, התכונה אומרת ש-$x \geq 0$, ולכן $g$ שומרת סימן.

באותו האופן, לכל $x, y$, הסימן של $x - y$, נשמר, כלומר, $g$ שומרת סדר.

ולכן נסיים את ההוכחה אם נוכיח שעבור אירציונאלי $e$ מתקיים, $g(e) = e$.

לכל $\varepsilon > 0$ קיימים רציונאליים $e - \varepsilon < q_1 < e < q_2 < e + \varepsilon$,

בגלל ש-$g$ שומרת סדר מתקיים:

$$e - \varepsilon < q_1 = f(q_1) < f(e) < f(q_2) = q_2 < e + \varepsilon$$

כלומר,

$$e - \varepsilon < f(e) < e + \varepsilon$$

ולכן ל-$f(e)$ נותר להיות רק $e$.

ולכן $g$ היא הזהות.