

קוטרניונים

יודעים מה זה שדה?

שדה F הוא קבוצה עם פעולת חיבור ופעולת כפל, ומכיל שני איברים, שנקרא להם 1, ו-0. פעולות ומספרים אלו צריכים לקיים כמה תנאים:

- א. שתי הפעולות חילופיות (קומוטיביות): לכל $a, b \in F$, מתקיים: $a + b = b + a$, ו-
 $a * b = b * a$.
- ב. שתי הפעולות קיבוציות (אסוציאטיביות): לכל $a, b, c \in F$, מתקיים:
 $(a + b) + c = a + (b + c)$, ו- $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- ג. חוק הפילוג: לכל $a, b, c \in F$, מתקיים, $a * (b + c) = a * b + a * c$.
- ד. 1 הוא ניטרלי לכפל: לכל $a \in F$ מתקיים $1 * a = a$.
- ה. 0 הוא ניטרלי לחיבור: לכל $a \in F$ מתקיים $0 + a = a$.
- ו. לכל $a \in F$ קיים $-a$ כך ש- $a + (-a) = 0$.
- ז. לכל $a \in F$, $a \neq 0$ קיים a^{-1} כך ש- $a * a^{-1} = 1$.

\mathbb{R} הוא שדה.

אנחנו יודעים איך בונים שדה ל- \mathbb{R}^2 . שדה המספרים המרוכבים \mathbb{C} . i מוגדר להיות שורש של 1- וכל מספר ב- \mathbb{C} ניתן להצגה כ- $a + ib$ כאשר a ו- b ממשיים. נשים לב ש- \mathbb{C} מכיל את \mathbb{R} , ושכפל של איבר z ב- \mathbb{C} בממשי a , הוא אותו כפל כמו האיבר z ב- \mathbb{R}^2 בסקלר a . עוד אנחנו יודעים, שחיבור ב- \mathbb{C} הוא אותו חיבור כמו ב- \mathbb{R}^2 . האם אפשר לבנות שדה שכזה ל- \mathbb{R}^3 ?

החיבור בשדה יהיה החיבור ב- \mathbb{R}^3 , ולכן נותר לקבוע את הכפל. אילו מכפלות אנחנו מכירים ב- \mathbb{R}^3 ?

- מכפלה סקלרית: $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. היא לא תוכל להיות המכפלה בשדה הרצוי כי היא לא מחזירה ווקטור אלא סקלר.

- מכפלה ווקטורית: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ הוא ווקטור שמאונך ל- \vec{v}_1 ול- \vec{v}_2 ואורכו כשטח המקבילית שהם יוצרים. אבל יש שניים כאלה, אז איזה אחד נבחר? נשתמש בחוק היד הימנית, שאומר: אם נחזיק את הישר שמאונך גם ל- \vec{v}_1 וגם ל- \vec{v}_2 ביד ימין, כך שהאצבעות יוצאות מכיוון \vec{v}_1 לכיוון \vec{v}_2 , אז הכיוון של $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ הוא לכיוון האגודל. נשים לב שכאשר הווקטורים מקבילים אי-אפשר להגדיר את הישר שמאונך לשניהם. אבל אז אין בעיות, שטח המקבילית שיוצרים \vec{v}_1 ו- \vec{v}_2 הוא 0 ולא צריך לקבוע לו כיוון.

בפרט, המכפלה הווקטורית $\vec{v}_1 \times \vec{v}_1$ הינה ווקטור ה-0. אבל אם השדה היה מכיל את \mathbb{R} , $1 * 1$ היה 0. וזה לא יתכן.

סיבה נוספת היא שבגלל חוק היד הימנית, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$, כלומר, הפעולה הינה אנטי חילופית, ולא חילופית.

נכשלנו במציאת שדה ל- \mathbb{R}^3 , אולי נצליח ל- \mathbb{R}^4 !
כן!

כמעט. זה לא יהיה שדה מלא כי פעולת הכפל שלו לא תהיה קומוטיבית. נקרא לו 'כמעט שדה' הקוטרניונים, \mathbb{H} . והנה הוא:

כל קוטרניון מיוצג על ידי $a + ib + jc + kd$ כאשר a, b, c, d ממשיים.
פעולת החיבור ברורה, $a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1 + a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2 =$
 $a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + k(d_1 + d_2)$

כיצד נגדיר את פעולת הכפל (שהיא החלק מעניין)?
אני אגדיר את הכפל בין $1, i, j, k$ -ו, אגיד שכפל בסקלר הוא קומוטיבי, (כלומר לסקלר a , ווקטור 4 ממדי z נגיד ש- $az = za$) ונקבל את הכפל הכללי.

והנה לוח הכפל ש $1, i, j, k$ -ו (כאשר המספר בעמודה נמצא מצד שמאל של הכפל, והמספר בשורה מצד ימין):

| | | | | |
|-----|-----|-------|-------|-------|
| * | 1 | i | j | k |
| 1 | 1 | i | j | k |
| i | i | -1 | k | - j |
| j | j | - k | -1 | i |
| k | k | j | - i | -1 |

ובאמצעותו אנחנו יודעים ש:

$$\begin{aligned}
 (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1)(a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) &= \\
 a_1a_2 + ia_1b_2 + ja_1c_2 + ka_1d_2 &= \\
 +ib_1a_2 - b_1b_2 + kb_1c_2 - jb_1d_2 &= \\
 = +jc_1a_2 - kc_1b_2 - c_1c_2 + ic_1d_2 &= \\
 +kd_1a_2 + jd_1b_2 - id_1c_2 - d_1d_2 &= \\
 = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - d_1c_2) &= \\
 + j(a_1c_2 + c_1a_2 - b_1d_2 + d_1b_2) + k(a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2) &=
 \end{aligned}$$

כעת נותר לבדוק את החוקים הנותרים שאמורים להתקיים על 'כמעט שדה' הקוטרניונים.

א. חילופיות חיבור – נכונה כי זה מרחב ווקטורי, חילופיות הכפל – לא נכונה

ב. קיבוציות החיבור – נכונה כי זה מרחב ווקטורי, קיבוציות הכפל:

עבור $a_1, a_i, a_j, a_k, b_1, b_i, b_j, b_k, c_1, c_i, c_j, c_k$ ממשיים אוכיה כי:

$$\left(\sum_{m=1}^k ma_m \sum_{n=1}^k nb_n \right) \sum_{l=1}^k lc_l = \sum_{m=1}^k ma_m \left(\sum_{n=1}^k nb_n \sum_{l=1}^k lc_l \right)$$

(כאשר אני כותב ש- m רץ מ-1 עד k אני מתכוון שהוא הולך: $1, i, j, k$)

נשים לב שניתן לאחד סכומים:

$$\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \sum_{l=1}^k (ma_m nb_n) lc_l = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \sum_{l=1}^k ma_m (nb_n lc_l)$$

בגלל שיש חילופיות בכפל בסקלר נוכל להוציא את הסקלרים מהקיבוציות, כלומר:

$$\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \sum_{l=1}^k (mn) la_m b_n c_l = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \sum_{l=1}^k m(nl) a_m b_n c_l$$

וכעת נותר להוכיח שלכל $m, n, l \in \{1, i, j, k\}$ מתקיים $(mn)l = m(nl)$

וזוהי בדיקת מקרים פשוטה שלא תעשה פה.

ג. חוק הפילוג (בגלל ש- \mathbb{H} אינו קומוטטיבי נצטרך להוכיח גם את החוק פילוג מימין, וגם את חוק הפילוג

משמאל. פה נוכיח את השמאלי, והקורא יוכל להוכיח את השני):

עבור $a_1, a_i, a_j, a_k, b_1, b_i, b_j, b_k, c_1, c_i, c_j, c_k$ ממשיים אוכיה כי:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^k ma_m \left(\sum_{n=1}^k nb_n + \sum_{n=1}^k nc_n \right) &= \\
 \sum_{m=1}^k ma_m \sum_{n=1}^k nb_n + \sum_{m=1}^k ma_m \sum_{n=1}^k nc_n &= \\
 \sum_{m=1}^k ma_m \left(\sum_{n=1}^k nb_n + \sum_{n=1}^k nc_n \right) &=
 \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^k ma_m \sum_{n=1}^k nb_n + nc_n =$$

$$\sum_{m=1}^k ma_m \sum_{n=1}^k n(b_n + c_n) =$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k mna_m(b_n + c_n) &= \\ \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k mna_mb_n + mna_mc_n &= \\ \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k mna_mb_n + \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k mna_mc_n &= \\ = \sum_{m=1}^k ma_m \sum_{n=1}^k nb_n + \sum_{m=1}^k ma_m \sum_{n=1}^k nc_n \end{aligned}$$

ד. 1 ניטראלי לכפל – הטענה ברורה, למעשה, ברור גם שכפל בקוטרניון ממשי הוא אותו הכפל באותו ממשי כסקלר ב-III מרחב ווקטורי.

ה. 0 ניטראלי לחיבור – נכון כי החיבור הוא חיבור של מרחב ווקטורי.

ו. לכל מספר z קיים $-z$ כזה ש- $z + (-z) = 0$. נכון מאותה הסיבה.

ז. לכל $a \in F$, $0 \neq a$ קיים יחיד a^{-1} כך ש- $a * a^{-1} = 1$.

פה צריך לנחש. זוכרים את הופכי במרוכבים? לכל מספר מרוכב z מתקיים, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. אולי זה יעבוד גם אצלנו?

נבדוק. נגדיר לקוטרניון $a + ib + jc + kd$ ש- $a - ib - ic - id$ נבדוק.

נגדיר ל- $a + ib + jc + kd$ ש- $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ נבדוק מהו $(a + ib + jc + kd) * \overline{a + ib + jc + kd}$

$(a + ib + jc + kd) * \overline{a + ib + jc + kd} =$

$$= (a + (ib + jc + kd)) * (a - (ib + jc + kd)) =$$

$$a^2 - a(ib + jc + kd) + (ib + jc + kd)a - (ib + jc + kd)^2 =$$

כעת בגלל שכפל קוטרניון בסקלר הוא קומוטטיבי, המחבר השני והשלישי מצטמצמים.

$$= a^2 - (ib + jc + kd)^2 =$$

$$a^2 - (i^2b^2 + j^2c^2 + k^2d^2 + (ij + ji)bc + (jk + kj)cd + (ik + ki)bd) =$$

נשים לב ש-

$$ij = -ji$$

$$ik = -ki$$

$$kj = -jk$$

ולכן הם מצטמצמים מהמשוואה:

$$= a^2 - (i^2b^2 + j^2c^2 + k^2d^2)$$

נשים לב ש- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

נמשיך את השוויון:

$$= a^2 - (-b^2 - c^2 - d^2) =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$= |a + ib + jc + kd|^2$$

ולכן באמת, לכל קוטרניון z מתקיים:

$$z * \bar{z} = |z|^2$$

ולכן

$$z * \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

ולכן, ממש כמו במספרים מרוכבים, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

והוכחנו שהקוטרניונים הם כמעט שדה (אמנם נשארו לכם הוכחה או שתיים לקרוא, אבל הן משעממות, והטענות ברורות).

עכשיו אני אגלה לכם דרך אחרת להציג קוטרניון.
אנחנו יודעים i, j, k -ים ציקליים, אז אולי שווה לשים אותם בווקטור אחד.

את הקוטרניון $z = a + ib + jc + kd$ נגדיר להיות $z = a + v$ כאשר v הוא הווקטור (b, c, d) ב- \mathbb{R}^3 .
את $a = \text{Re}(z)$, החלק הממשי של קוטרניון z , ואת $v = \text{Im}(z)$ נסמן ב- v .
לאוסף הקוטרניונים z בו $\text{Re}(z) = 0$ נקרא מספרים מדומים.
ועכשיו נראה איך עובדים חיבור וכפל בצורה החדשה.
טוב, חיבור הוא ברור, מחברים את הסקלר ומחברים את הקאורדינאטות של הווקטור. ומה עם כפל?

$$(a_1 + v_1) * (a_2 + v_2) =$$

$$\underbrace{a_1 a_2}_{\text{כפל שני סקלרים}} + \underbrace{a_1 v_2 + a_2 v_1}_{\text{כפל סקלר בווקטור, יודעים איך הוא עובד.}} + \underbrace{v_1 v_2}_{\text{כפל ווקטור בווקטור, צריך להבין איך הוא עובד.}}$$

עבור שני ווקטורים, $v_1 = ib_1 + jc_1 + kd_1$ ו- $v_2 = ib_2 + jc_2 + kd_2$, מהו $v_1 v_2$?

$$v_1 v_2 = (ib_1 + jc_1 + kd_1)(ib_2 + jc_2 + kd_2)$$

$$= i^2 b_1 b_2 + j^2 c_1 c_2 + k^2 d_1 d_2 + ij b_1 c_2 + jic_1 b_2 + ik b_1 d_2 + kid_1 b_2 + jkc_1 d_2 + kjd_1 c_2$$

$$= -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + i(c_1 d_2 - d_1 c_2) + j(d_1 b_2 - b_1 d_2) + k(b_1 c_2 - c_1 b_2)$$

נשים לב שהחלק הממשי הוא $\langle v_1, v_2 \rangle$, מינוס המכפלה הסקלרית.
החלק המדומה, שהוא: $(c_1 d_2 - d_1 c_2, d_1 b_2 - b_1 d_2, b_1 c_2 - c_1 b_2)$, $\text{Im}(v_1 v_2)$, אולי הוא המכפלה הווקטורית?

נבדוק. תחילה נבדוק אם הוא מאונך לשניהם.

$$\langle (c_1 d_2 - d_1 c_2, d_1 b_2 - b_1 d_2, b_1 c_2 - c_1 b_2), (b_1, c_1, d_1) \rangle$$

$$= b_1 c_1 d_2 - b_1 d_1 c_2 + c_1 d_1 b_2 - c_1 b_1 d_2 + d_1 b_1 c_2 - d_1 c_1 b_2$$

והוא מאונך ל- v_1 . נשים לב ש- $\text{Im}_{v_1 v_2}$ אנטי סימטרי ביחס ל- v_1 ו- v_2 , ולכן $\text{Im}(v_1 v_2)$ מאונך גם ל- v_2 .

$$| \text{Im}(v_1 v_2) | = \sin(v_1, v_2) |v_1| |v_2|$$

$$| \text{Im}(v_1 v_2) |^2 = \sin^2(v_1, v_2) |v_1|^2 |v_2|^2$$

$$| \text{Im}(v_1 v_2) |^2 = (1 - \cos^2(v_1, v_2)) |v_1|^2 |v_2|^2$$

$$\cos(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1| |v_2|}$$

$$| \text{Im}_{v_1 v_2} |^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle^2}{|v_1|^2 |v_2|^2} |v_1|^2 |v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$$

$$| \text{Im}_{v_1 v_2} |^2 + \langle v_1, v_2 \rangle^2 = |v_1|^2 |v_2|^2$$

$$\text{Im}_{v_1 v_2} + \langle v_1, v_2 \rangle = v_1 v_2$$

$$| \text{Im}_{v_1 v_2} |^2 + \langle v_1, v_2 \rangle^2 = |v_1 v_2|^2$$

ולכן יש להוכיח, $|v_1 v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2$, וזה משפט בפני עצמו.

למה: לכל שני קוטרניונים z_1, z_2 , מתקיים $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
נזכר ש- $|z|^2 = z \bar{z}$.

$$z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 \stackrel{?}{=} z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$z_1 \bar{z}_1 (z_2 \bar{z}_2) \stackrel{?}{=} z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2$$

$$z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 \stackrel{?}{=} z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\bar{z}_2 \bar{z}_1 \stackrel{?}{=} \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

נוכל לחלק בצד שמאל ב- $z_1 z_2$ ולקבל: $\bar{z}_2 \bar{z}_1 = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
נסמן: $z_1 = a_1 + v_1$, ו- $z_2 = a_2 + v_2$, כאשר v_1, v_2 הם ווקטורים ו- a_1, a_2 הם סקלרים.

$$\bar{z}_2 \bar{z}_1 = (a_2 + v_2) (a_1 + v_1) = (a_2 - v_2)(a_1 - v_1) = a_1 a_2 - a_1 v_2 - a_2 v_1 + v_2 v_1$$

$$= a_1 a_2 - a_1 v_2 - a_2 v_1 + \text{Im}_{v_2 v_1} - \langle v_1, v_2 \rangle$$

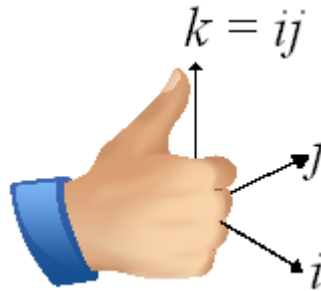
$$= a_1 a_2 + a_1 v_2 + a_2 v_1 - \text{Im}_{v_2 v_1} - \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\text{בגלל ש-} \text{Im} \text{ הוא אנטי סימטרי } \text{Im}_{v_2 v_1} = -\text{Im}_{v_1 v_2} \text{ ולכן הביטוי למעלה שווה ל-}$$

$$= \overline{a_1 a_2 + a_1 v_2 + a_2 v_1 + Im_{v_1 v_2} - \langle v_1, v_2 \rangle} = \overline{a_1 a_2 + a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 v_2} = \overline{z_1 z_2}$$

ולכן $\overline{z_2 z_1} = \overline{z_1 z_2}$
ולכן $|z_1| |z_2| = |z_1 z_2|$.
שזה מה שרצינו להוכיח בלמה.

הצלחנו להוכיח ש- $|v_1 v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2$. ולכן $Im_{v_1 v_2}$ הוא $v_1 \times v_2$ (עד כדי חוק היד הימנית. אבל נוכל לסדר את i ו- j כך שהוא יתקיים עבורם, ולכן בגלל רציפות הוא מתקיים תמיד.)



עד כה חוסר החילופיות של הכפל הפריע לנו. בואו נראה איך אפשר להרוויח ממנו. איזה ביטוי חוסר החילופיות משפיע בו? נבחר קוטרניון q , ונתבונן בפונקציה: $f_q: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, f_q(z) = qzq^{-1}$. f_q מורכבת משתי הכפלות בקבוע, ימנית ושמאלית. קל לראות ששכל הכפלה בקבוע היא לינארית, ולכן $f_q(z)$ היא לינארית. נשים לב ש-

$$|f_q(z_1) - f_q(z_2)| = |qz_1q^{-1} - qz_2q^{-1}| = |q(z_1q^{-1} - z_2q^{-1})| = |q(z_1 - z_2)q^{-1}| = |q||q^{-1}||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$$

ולכן $f_q(z)$ לא רק לינארית אלא גם סיבוב. אבל 'סיבוב' אינו אומר הרבה. יש מספר גדול מאוד של סיבובים ב- \mathbb{R}^4 .

אם נוכל למצוא נקודות שבת ל- $f_q(z)$ יהיה יותר קל לעבוד איתה.

א. לכל a סקלר, $f_q(a) = qaq^{-1} = a$.

ב. לכל a סקלר, $f_q(aq) = qaqq^{-1} = aq$.

בגלל ש- f_q זהות על הממשיים, והיא סיבוב, אז המרחב של הקוטרניונים שמאונכים לממשיים, כלומר, המדומים, עובר לעצמו.

ומצאנו שיטה לקבל סיבובים ב- \mathbb{R}^3 באמצעות קוטרניונים, מדומים f_q . האם אלה כל הסיבובים? האם כל סיבוב מתקבל פעם אחת? מיד נדע.

לכל סקלר a , מתקיים $f_{aq} = f_q$. כל סיבוב מתקבל מספר רב של פעמים. אבל אם ניקח q כזה ש- $|q| = 1$, נדע שיש לפחות פעמיים כל סיבוב (q ומינוס q). אראה שיש כך בדיוק פעמיים כל סיבוב. נציג את q כ-

$$. \cos \alpha + v \sin \alpha$$

אם הייתי יודע ש- $v = i$ היה לי קל לחקור את f_q :

אני אחשב כמה מסתובב j ב- f_q , וזה (בגלל ש- j מדומה ומאונך ל- i) יהיה זווית הסיבוב של f_q .

$$\begin{aligned} f_q(j) &= jq\bar{q} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)j(\cos \alpha - i \sin \alpha) \\ &= j \cos^2 \alpha - j i \cos \alpha \sin \alpha + i j \cos \alpha \sin \alpha - i j \sin^2 \alpha \\ &= j(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2ij \cos \alpha \sin \alpha = j \cos 2\alpha + i j \sin 2\alpha \end{aligned}$$

כלומר, במקרה זה, היא סיבוב ב- 2α בכיוון חוק היד הימנית (i הוא האגודל, j היא האצבע הראשונה, $f_q(j)$ היא האצבע השנייה).

אם נמצא אוטומורפיזם שהוא סיבוב שמעביר את v ל- i , נוכיח שתמיד (לכל v) f_q היא סיבוב ב- 2α . נבחר ווקטור u מאונך ל- v . נסמן $w = vu$. קל לראות שלוחה הכפל בין $1, v, u$ ו- w , זהה ללוחה הכפל בין $1, i, j$ ו- k . (כשמחליפים את v ב- i , את u ב- j ואת w ב- k). ולכן ההעתקה: $g(a + bi + cj + dk) = a + bv + cu + dw$ שומרת כפל. מצד שני, היא לינארית, ולכן שומרת חיבור, מצד שלישי, בתור העתקה לינארית, היא אורתוגנלית, ולכן סיבוב. ולכן g היא אוטומורפיזם סיבוב שהופך את v ל- i , ולכן תמיד f_q היא סיבוב ב- 2α . נראה שכל סיבוב הוא אחד מ- f_q . ויותר מכך, כל אוטומורפיזם הוא אחד מ- f_q .

קל לראות ש- $f_q(z)$ היא אוטומורפיזם כלומר, העתקה מה-'כמעט שדה' לעצמו ששומרת על כל תכונותיו, חיבור וכפל -

$$f_q(z_1 + z_2) = q(z_1 + z_2)q^{-1} = qz_1q^{-1} + qz_2q^{-1} = f_q(z_1) + f_q(z_2) \text{ - חיבור}$$

$$f_q(z_1z_2) = f_q(z_1z_2) = qz_1z_2q^{-1} = qz_1q^{-1}qz_2q^{-1} = f_q(z_1)f_q(z_2) \text{ - כפל}$$

ונראה שאין אוטומורפיזמים אחרים.

כעת נראה אילו תכונות אוטומורפיזם על \mathbb{H} חייב לקיים.

אם $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ אוטומורפיזם, נתבונן בתכונה של קוטרניון q , $(f_q = Id)$. זוהי תכונה שתלויה אך ורק בכפל, ולכן נשמרת באוטומורפיזם. ברור שהתכונה נכונה לכל $q \in \mathbb{R}$. אראה שלכן קוטרניון q , אם $Im(q) \neq 0$ (א) $q \notin \mathbb{R}$ התכונה אינה מתקיימת. נבחר ווקטור v מאונך ל- $Im(q)$, נראה ש- $\frac{qv\bar{q}}{|q|^2}$ אינו v ולכן $qv\bar{q}^{-1}$ גם כן אינו מקביל ל- v ולכן אינו v .

$$\begin{aligned} qv\bar{q} &= (Re(q) + Im(q))v(Re(q) - Im(q)) \\ &= Re(q)^2v - Re(q)vIm(q) + Im(q)vRe(q) - Im(q)vIm(q) \\ &= Re(q)^2v + Re(q)(Im(q)v - vIm(q)) - Im(q)vIm(q) \\ &= Re(q)^2v + Re(q)(Im(q) \times v - \langle Im(q), v \rangle - v \times Im(q) + \langle Im(q), v \rangle) \\ &\quad - Im(q)vIm(q) \\ &= Re(q)^2v + Re(q)(Im(q) \times v + Im(q) \times v) - Im(q)vIm(q) \\ &= Re(q)^2v + 2Re(q)Im(q) \times v - Im(q)vIm(q) \\ Im(q)vIm(q) &= (Im(q) \times v - \langle Im(q), v \rangle)Im(q) = (Im(q) \times v)Im(q) \end{aligned}$$

$Im(q) \times v$ הוא ווקטור מאונך ל- $Im(q)$ מתוך הגדרה, ולכן מכפלתם כקוטרניונים תהיה ווקטור שמאונך לשניהם (v). (בדיקה פשוטה של חוק היד הימנית מאוששת ששום סימן לא מופיע). ולכן, $Im(q)vIm(q) = |Im(q)|^2v$ ולכן:

$$\begin{aligned} qv\bar{q} &= Re(q)^2v - |Im(q)|^2v + 2Re(q)(Im(q) \times v) \\ &= (Re(q)^2 - |Im(q)|^2)v + 2Re(q)(Im(q) \times v) \end{aligned}$$

אם $Re(q) > 0$, אזי $qv\bar{q}$ הינו כפולה של v בסקלר, ועוד תוספת לא אפסית של ווקטור שמאונך ל- v , ולכן אינו מקביל ל- v ולכן $qv\bar{q}^{-1} = \frac{qv\bar{q}}{|q|^2}$ אינו מקביל ל- v ולכן שונה ממנו.

$$qv\bar{q} = -|Im(q)|^2v = -(Re(q)^2 + |Im(q)|^2)v = -|q|^2v \text{ אזי } 0 \neq Re(q) \text{ שווה } 0 \text{ ולכן } qv\bar{q}^{-1} = -v \neq v$$

ולכן, לכל אוטומורפיזם g , מתקיים: $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. נשים לב ש- $g|_{\mathbb{R}}$ היא אוטומורפיזם על הממשיים. בגלל של- \mathbb{R} יש אוטומורפיזם אחד, הזהות, מתקיים, שלכל סקלר a , $g(a) = a$, ולכן לכל קוטרניון q , מתקיים, $ag(q) =$

$$g(a)g(q) = q(aq)$$

ואנו רואים ש- g לינארית.

נתבונן בתכונה של קוטרניון z , $z^2 \in \mathbb{R}, z^2 \leq 0$. קל לראות שתכונה זו היא התכונה 'מדומה':

$$(a + v)(a + v) = a^2 + 2av + v^2 = a^2 + 2av + v \times v - \langle v, v \rangle$$

החלק המדומה של זה הוא $2av$, ולכן נקבל: $2av = 0$. אם $a = 0$ נקבל $0 \leq \langle v, v \rangle = -(a + v)(a + v)$. סתירה. אם $a \neq 0$ אז $v = 0$ ו- $a^2 > 0$.

ולכן, רק קוטרניונים מדומים מקיימים את התכונה $z^2 \in \mathbb{R}, z^2 \leq 0$.

נשים לב שהאוטומורפיזם g שומר על התכונה: אם $z^2 \in \mathbb{R}, z^2 \leq 0$ אז עבור $g(z)^2 = g(z^2)$ מתקיים, בגלל ש- z^2 ממשי, $g(z^2) = z^2$, ולכן $g(z)^2 = z^2 \leq 0$. ולכן g שומרת על הצמדה:

$$\overline{g(a + v)} = \overline{g(a) + g(v)} = g(a) - g(v) = g(a - v) = g(\overline{a + v})$$

ולכן g שומרת על אורך קוטרניון:

$$|g(z)|^2 = g(z)\overline{g(z)} = g(z)g(\bar{z}) = g(z\bar{z}) = g(|z|^2) = |z|^2$$

ולכן g היא סיבוב או היפוך. אבל היא לא היפוך כי היפוך לא שומר על חוק היד הימנית ואילו פונקציה ששומרת על כפל אמורה לשמור על החוק.

נתבונן בסיבוב על המדומים (\mathbb{R}^3) ונבחר וקטור v על ציר הסיבוב באורך אחד ($|v| = 1$) נקרא לזווית הסיבוב 2α . נקבל ש- $g = f \cos \alpha + v \sin \alpha$.

• ל- \mathbb{R} יש אוטומורפיזם אחד, הזהות.

הוכחה:

יהי $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אוטומורפיזם.

1 הוא המספר הניטרלי לכלל היחיד, ולכן $g(1) = 1$

ולכן לכל טבעי n , מתקיים:

$$g(n) = g(1 + 1 + \dots + 1) = g(1) + g(1) + \dots + g(1) = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

ולכן לכל רציונאלי חיובי, $\frac{p}{q}$ מתקיים, $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{g(p)}{g(q)} = \frac{p}{q}$

ולכן לכל רציונאלי שלילי $-q$, מתקיים $g(-q) = -g(q) = -q$ (כאשר '-' היא הפעולה ההפוכה לחיבור).

עבור x , התכונה "קיים ל- x שורש ריבועי" היא תכונה שמוצגת ע"י אריתמטיקה של שדה, ולכן g שומרת עליה, מצד שני, התכונה אומרת ש- $x \geq 0$, ולכן g שומרת סימן.

באותו האופן, לכל x, y , הסימן של $x - y$, נשמר, כלומר, g שומרת סדר.

ולכן נסיים את ההוכחה אם נוכיח שעבור אירציונאלי e מתקיים, $g(e) = e$.

לכל $0 < \varepsilon$ קיימים רציונאליים $e - \varepsilon < q_1 < e < q_2 < e + \varepsilon$,

בגלל ש- g שומרת סדר מתקיים:

$$e - \varepsilon < q_1 = f(q_1) < f(e) < f(q_2) = q_2 < e + \varepsilon$$

כלומר,

$$e - \varepsilon < f(e) < e + \varepsilon$$

ולכן ל- $f(e)$ נותר להיות רק e .

ולכן g היא הזהות.