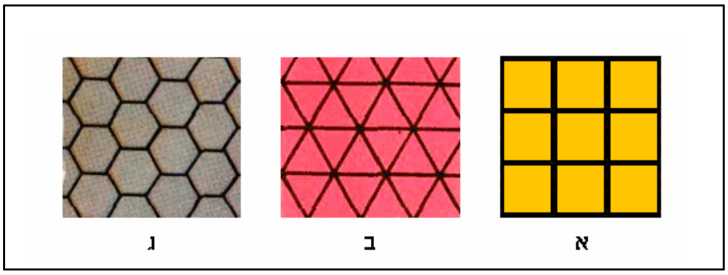
ריצופים ממצולעים משוכללים / א. נ. קולמוגורוב

מהו ריצוף?

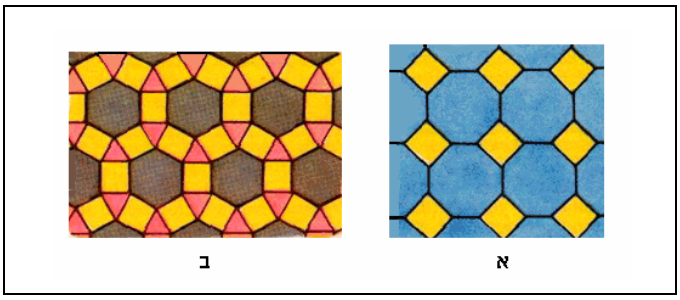
הריצוף הכי פשוט, אבל גם הכי משעמם מתקבל כאשר מחלקים מישור לריבועים שווים, כפי שמתואר בציור 1'א. בריצוף זה כל שני ריבועים חולקים או צלע משותפת, או קודקוד משותף או לא חולקים שום נקודות משותפות.

*לכיסוי של מישור ע"י מצולעים משוכללים נקרא **ריצוף**, אם כל שני מצולעים חולקים או צלע משותפת, או קודקוד משותף או לא חולקים שום נקודות משותפות.*

בטח יצא לכם לראות ריצוף המורכב ממתומנים משוכללים וריבועים (ציור 2'א). ריצוף יפה אפשר להרכיב ממשושים משוכללים, ריבועים ומשולשים שווי-צלעות (ציור 2'ב). ריצוף יוצר תחושה נעימה אם הוא סימטרי. צורה נקראת סימטרית אם ניתן להניח אותה על עצמה באופן לא טריוויאלי (כלומר, לא כך שכל הנקודות יישארו במקומן).



ציור 1.



ציור 2.

לדוגמא, בציור 2'ב, כאשר מסובבים את כל מערכת הקודקודים והצלעות היוצרים את הריצוף המורכב ממשושים, ריבועים ומשולשים, בזווית של 60° מסביב למרכזו של אחד המשושים, נקבל את אותה מערכת. כל אחד ממרכזי המשושים במערכת זו הוא **"מרכז סימטריה מסדר שישי"**.

__בעיה 1:__ מצאו את כל מרכזי הסימטריה מסדר רביעי, שלישי ושני בפרקט התואר בציור 2'א.

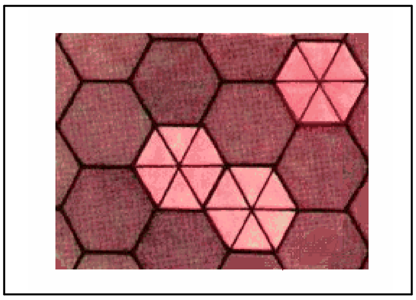
__מהו ריצוף משוכלל?__

מבחינת סימטריה ההגדרה שלנו לריצוף אינה מוצלחת במיוחד. היא מאפשרת לריצופים חסרי כל סימטריה להיקרא סימטריים. ניקח לדוגמא ריצוף הבנוי ממשושים משוכללים (ציור 1'ג) - ניתן "להרוס" אותו אם נחלק חלק מהמשושים ל-6 משולשים. קל להבין כי יתקבל ריצוף חדש אשר לפי הגדרתנו הינו ריצוף סימטרי. ניתן להוכיח (תנסו!) כי כאשר אנו מחלקים למשולשים, לדוגמא, 3 משושים, כפי שמתואר בציור 3, ומשאירים את כל השאר "שלמים", נקבל ריצוף אשר אינו סימטרי כלל.
בכדי להימנע ממפגש עם ריצופים לא יפים וחסרי סימטריה, נכתוב את ההגדרה הבאה:

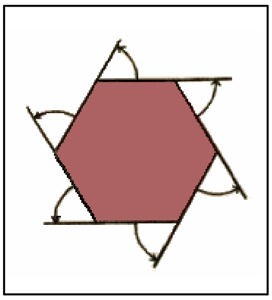
*ריצוף ייקרא משוכלל אם ניתן לחפוף אותו עם עצמו, כך שכל קודקוד נתון שלו מונח על קודקוד נתון **אחר** שלו.*

__בעיה 2:__ הוכיחו כי הריצופים המתוארים בציורים 1 ו-2, הם משוכללים ובנו כמה שיותר ריצופים משוכללים משלכם.

* __הגדרה:__ נקודה O תיקרא המרכז הסימטרי מסדר n של צורה כלשהי, אם ע"י סיבוב הצורה סביב נקודה O בזווית של $\frac{360^\circ}{n}$ הצורה תחפוף את עצמה.



ציור 3.



ציור 4.

__הבעיה העיקרית__

מתברר, כי את כל סוגי הריצופים המשוכללים ניתן לתאר. אם נתון h - אורך הצלע של המצולעים המשוכללים הבונים את הריצוף, אזי יש מספר סופי של ריצופים משוכללים שונים (לא חופפים). כמה בדיוק ריצופים כאלו יש, אני לא אגיד.

למצוא את כולם ובכך לענות על השאלה הנוגעת למספרם, הינה הבעיה העיקרית שעליכם לפתור.

הוראות

את פתרון השאלה צריך כמובן להתחיל מחקר המבנה של קודקודי הריצוף. מצולע משוכלל בעל n צלעות הוא בעל n זוויות חיצוניות (ציור 4), שסכומן הוא 360° (תבדקו זאת בעצמכם). לכן, כל זווית של מצולע משוכלל בעל n צלעות יהיה שווה:

$$.\alpha_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

בקודקוד הריצוף מתכנסים מצולעים עם סכום זוויות השווה ל- 360°. כך ש-

$$\alpha_3 = 60^\circ,\ \alpha_4 = 90^\circ,\ \alpha_6 = 120^\circ,\ \alpha_8 = 135^\circ$$

ולריצופים המתוארים בציורים 1 ו-2, מקבלים בהתאמה:

$$\begin{aligned} &4\alpha_4 = 360^\circ, \\ &6\alpha_3 = 360^\circ, \\ &3\alpha_6 = 360^\circ, \\ &\alpha_4 + 2\alpha_8 = 360^\circ, \\ &\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_6 = 360^\circ. \end{aligned}$$

במקרה הכללי, נסמן ב- m_n את מספר המצולעים (בעלי n צלעות) המתכנסים בקודקוד הריצוף. אנו צריכים לקבל

$$\sum m_i \alpha_i = 360^\circ \qquad (1)$$

כאשר בסכום אנו מחשיבים גם את כל אותם המחוברים עם מספרי i, אשר עבורם $m_i > 0$ ו- $.\alpha_i = \frac{180^\circ(i-2)}{i}$

הבעיה הראשונה שלנו מסתכמת במציאת כל הפתרונות למשוואה (1) עם $.m_i > 0$

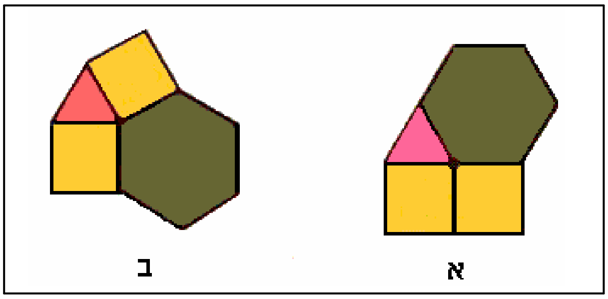
את משוואה (1), ע"י צמצום ב- 180° נוח להציג כ-

$$.\sum m_i \cdot \left(\frac{i-2}{i}\right) = 2 \qquad (2)$$

בכדי לקבל את כל הפתרונות למשוואה (2) צריך לחקור את כל אפשרויות המיקום של המצולעים המתכנסים באותו קודקוד. לדוגמא, הפתרון $m_3=1$, $m_4=2$, $m_6=1$,

$$\left(\frac{1}{3}\right)+2\cdot\left(\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{4}{6}\right)=2,$$

מתאר קודקודים בהם מתכנסים משולש אחד, שני ריבועים ומשושה אחד.



ציור 5.

קל למקם את המשולש, שני הריבועים והמשושה בשני אופנים (ציור 5'א, 5'ב). קל להוכיח (הוכיחו!) כי ציור 5'ב אינו מתאר שום סוג של ריצוף משוכלל.

ההוראות ניתנו. קדימה לעבודה!