משולשים $A_1B_1C_1$ ו-$A_2B_2C_2$ נקראים **פרספקטיביים** אם הישרים A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 נפגשים בנקודה אחת O (אולי אינסופית), שנקראת **מרכז הפרספקטיבה**. לפי משפט דזארג, זה שקול לכך שנקודות המפגש של A_1B_1 עם A_2B_2, של A_1C_1 עם A_2C_2, ושל B_1C_1 עם B_2C_2 נמצאות על ישר אחד, שנקרא **ישר הפרספקטיבה**.

משולשים $A_1B_1C_1$ ו-$A_2B_2C_2$ נקראים **אורתולוגיים**, אם האנכים מ-A_1 ל-B_2C_2, מ-B_1 ל-A_2C_2 ומ-C_1 ל-A_2B_2 נפגשים בנקודה אחת, שנקראת **מרכז האורתולוגיה** של המשולש הראשון ביחס למשולש השני. משפט שטיינר (שהוא מסקנה פשוטה ממשפט קרנו) טוען שיחס זה סימטרי: אם $A_1B_1C_1$ אורתולוגי ל-$A_2B_2C_2$, אז גם $A_2B_2C_2$ אורתולוגי ל-$A_1B_1C_1$.

משפט האורתולוגיה. נניח כי $A_1B_1C_1$ ו-$A_2B_2C_2$ פרספקטיביים ואורתולוגיים. אז מרכז הפרספקטיבה ושני מרכזי האורתולוגיה נמצאים על ישר אחד, שמאונך לישר הפרספקטיבה.

הוכחה (עומרי). בהינתן שניונית S ונקודה P, אנו מעוניינים למצוא את המקום הגיאומטרי G של הנקודות X עבורן הישר PX מאונך לישר הדואלי של X ביחס ל-S.

ראשית נמצא את החיתוך של G עם ישר ℓ כלשהו דרך P. תהא $X \in \ell \bigcap G$ נקודה השונה מ-P. תהא T נקודה אינסופית בכיוון המאונך ל-ℓ. יהא x הישר הדואלי ל-X, ו-t הישר הדואלי ל-T יחסית ל-S. אז $T \in x$, ולכן $X \in t$, כלומר $X = \ell \bigcap t$. נשים לב כי הישר t עובר דרך המרכז של S. לכן, כאשר ℓ מסתובב סביב P, t מסתובב פרויקטיבית סביב מרכז השניונית. לכן G היא שניונית שעוברת ב-P ובמרכז של S. בנוסף, הנקודות באינסוף בכיוונים של צירי S נמצאות על G, כי הישר הדואלי של כל אחת מהן הוא הציר השני. כלומר G היא היפרבולה ישרה.

ובכן הוכחנו:

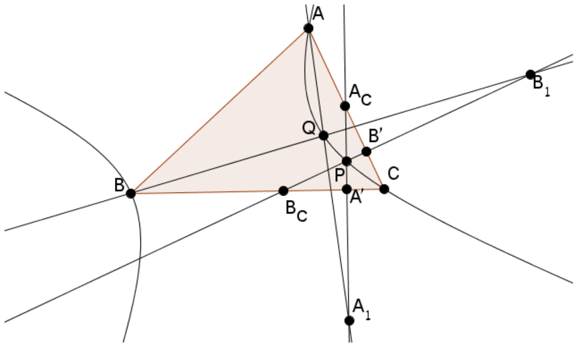
טענה 1. בהינתן שניונית S ונקודה P, המקום הגיאומטרי $G_S(\mathrm{P})$ של הנקודות X עבורן הישר PX מאונך לישר הדואלי של X ביחס ל-S הוא היפרבולה ישרה העוברת דרך P, המרכז של S, והנקודות האינסופיות בכיווני הצירים של S.

טענה 2. לכל שני משולשים פרספקטיביים קיימת שניונית שהם דואליים ביחס אליה.

הוכחת טענה 2. באמצעות העתקה פרויקטיבית נעביר את ישר הפרספקטיבה לישר באינסוף. אז המשולשים יעברו למשולשים דומים. באמצעות העתקה אפינית נוספת נדאג לכך שמרכז הפרספקטיבה (שהוא מרכז ההומותטיה שמעבירה את אחד המשולשים לשני) יהיה מפגש הגבהים של המשולש הראשון. נשים לב כי לכל משולש קיים מעגל (אולי

מדומה) שמרכזו מפגש הגבהים של המשולש, שביחס אליו המשולש דואלי לעצמו. אם נשנה את הרדיוס, נקבל שהמשולשים דואלים זה לזה ביחס אליו.

טענה 3. יהיו A,B,C,P,Q נקודות על היפרבולה ישרה. תהי A' עקב הגובה מ-P ל-BC, ובאופן דומה B' עקב הגובה מ-P ל-AC. הישרים PA' ו-QA נפגשים בנקודה A_1, והישרים PB' ו-QB נפגשים בנקודה B_1. אזי $PA'\cdot PA_1=PB'\cdot PB_1$ (כלומר A',A_1,B',B_1 על מעגל אחד).



הוכחה. כאשר Q זזה על פני ההיפרבולה, A_1 ו-B_1 הן הטלות של Q ולכן מספיק לבדוק את הטענה ב-3 נקודות Q שונות.

נקודה ראשונה: $Q=P$. אז $A_1=P=B_1$ ואז שני האגפים מתאפסים.

נקודה אחרת היא נקודת מפגש הגבהים. במקרה זה AQ מקביל ל-PA', ולכן A_1 היא נקודה אינסופית, ובאופן דומה גם B_1. לכן שני האגפים שווים ל-∞.

הנקודה השלישית היא C. במקרה זה מקבלים נקודות A_C ו-B_C בציור. אבל מעגל שקוטרו A_CB_C עובר דרך A' ו-B' ולכן 4 נקודות הן על מעגל גם במקרה זה.

זה מסיים את הוכחת הטענה.

נוכיח כעת את משפט האורתולוגיה. עבור המשולשים $A_1B_1C_1$ ו-$A_2B_2C_2$ נסמן את השניונית אשר ביחס אליה הם דואליים ב-S. בנוסף נסמן את מרכז האורתולוגיה של $A_1B_1C_1$ יחסית ל-$A_2B_2C_2$ ב-P_1, ואת מרכז האורתולוגיה של $A_2B_2C_2$ יחסית ל-$A_1B_1C_1$ ב-P_2. נסמן את מרכז הפרספקטיבה ב-D, ואת ישר הפרספקטיבה ב-d.

קודם נראה, ש-d ו-D דואלים ביחס ל-S. אכן, הגדרות של מרכז פרספקטיבה ושל ישר פרספקטיבה דואליות, לכן מרכז הפרספקטיבה של $A_1B_1C_1$ ו-$A_2B_2C_2$ דואלי לישר הפרספקטיבה של המשולשים הדואליים שלהם, שהם אותם המשולשים (בסדר הפוך).

כעת נתבונן ב-$G_S\left(P_1\right)$. הוא מכיל את P_1, המרכז של השניונית, ומההגדרה של P_1 גם את A_1, B_1 ו-C_1. ניתן כעת לראות כי משפט האורתולוגיה שקול לטענה $D\in G_S\left(P_1\right)$.

נפעיל העתקה אפינית שתשמור על נקודות החיתוך של $G_S\left(P_1\right)$ עם הישר האינסופי ותעביר את S למעגל. נשים לב כי המרכז של השניונית S, שיסומן O, נשמר תחת ההעתקה, ולכן הוא כעת מרכז המעגל, ונמצא על ההיפרבולה הישרה.

נשתמש באותן אותיות גם אחרי שביצענו העתקה אפינית לתמונה. תהא D^* נקודת החיתוך השנייה של הישר A_1A_2 עם ההיפרבולה הישרה, ותהא B^* נקודת החיתוך השנייה של הישר B_1D^* עם ההיפרבולה הישרה.

נראה כי $B^*=B_2$. נסמן ב- A',B' עקבי האנכים מ- O לישרים BC,AC. קל לראות כי $OB_2\cdot OB'=OA_2\cdot OA'$. בנוסף, על פי טענה 3, $OA'\cdot OA_2=OB'\cdot OB^*$.

באופן דומה $C^*=C_2$ אם C^* מוגדר בדומה ל- B^*. ולכן הישרים A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 נפגשים כולם ב- D^*, כלומר $D=D^*$. לכן D נמצאת על ההיפרבולה הישרה, וזה משלים את ההוכחה.

מסקנה נוספת שקיבלנו מהוכחה: כל הקודקודים של המשולש הראשון, נקודת הפרספקטיבה ונקודת האורתולוגיה של המשולש הראשון ביחס למשולש השני נמצאים על היפרבולה ישרה.