אי-שוויונות מסוג $\left(\frac{\varphi_a}{\psi_a}\right)^\eta+\left(\frac{\varphi_b}{\psi_b}\right)^\eta+\left(\frac{\varphi_c}{\psi_c}\right)^\eta\ge 3$

נניח כי

$$\varphi(a,b,c)=\alpha_1\cdot a+\beta_1\cdot b+\gamma_1\cdot c$$
$$\psi(a,b,c)=\alpha_2\cdot a+\beta_2\cdot b+\gamma_2\cdot c$$

כאשר $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\alpha_2+\beta_2+\gamma_2$, וקיימים $\lambda,\mu>0$ שעבורם

$$\lambda\cdot\varphi(a,b,c)+\mu\cdot\psi(a,b,c)=a+b+c$$

ונגדיר

$$\varphi_a=\varphi(a,b,c),\varphi_b=\varphi(b,c,a),\varphi_c=\varphi(c,a,b)$$
$$\psi_a=\psi(a,b,c),\psi_b=\psi(b,c,a),\psi_c=\psi(c,a,b)$$

נתעניין ב- a,b,c כאלו ש- $\varphi_a,\varphi_b,\varphi_c,\psi_a,\psi_b,\psi_c>0$ (אחרת לא תמיד נוכל להגדיר חזקה).

נתבונן ב אי-שוויונות מהסוג הבא

$$\left(\frac{\varphi_a}{\psi_a}\right)^\eta+\left(\frac{\varphi_b}{\psi_b}\right)^\eta+\left(\frac{\varphi_c}{\psi_c}\right)^\eta\ge 3 \qquad (*)$$

אנו ננסה לחקור מתי אי-שוויון כזה מתקיים.

זה לא תמיד נכון, אבל אפשר להוכיח את זה במקרים מסוימים.

למשל, עבור כל $0<a,b,c$

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{2/3}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{2/3}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{2/3}\ge 3$$
$$\sqrt[3]{\frac{b+c}{2a}}+\sqrt[3]{\frac{c+a}{2b}}+\sqrt[3]{\frac{a+b}{2c}}\ge 3$$

טענה 1

אם $A^\alpha+B^\alpha+C^\alpha\ge 3$ ומתקיים $0<\alpha\le\beta$ אז $A^\beta+B^\beta+C^\beta\ge 3$.

הוכחה.

$$\frac{\alpha\cdot A^\beta+(\beta-\alpha)\cdot 1}{\beta}\ge\sqrt[\beta]{\left(A^\beta\right)^\alpha\cdot 1^{\beta-\alpha}}=A^\alpha$$

נסכם 3 אי-שוויונות מהסוג הזה ונקבל

$$\frac{\alpha\cdot\left(A^\beta+B^\beta+C^\beta\right)+(\beta-\alpha)\cdot 3}{\beta}\ge A^\alpha+B^\alpha+C^\alpha\ge 3$$

לכן

$$\alpha\cdot\left(A^\beta+B^\beta+C^\beta\right)+(\beta-\alpha)\cdot 3\ge 3\beta$$
$$\alpha\cdot\left(A^\beta+B^\beta+C^\beta\right)\ge 3\alpha$$
$$A^\beta+B^\beta+C^\beta\ge 3$$

מש"ל.

ולכן אם הוכנו עבור $\eta=\eta_0>0$ מסוים את (*) אז למעשה הוכחנו, לכל $\eta\ge\eta_0$.

נוכיח את הטענה עבור $\eta=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

טענה 2

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{\mu/\lambda+\mu} \geq \frac{(\lambda+\mu)\varphi}{\lambda\cdot\varphi+\mu\cdot\psi}$$

הוכחה.

נעתיק את אי-שוויון שלנו בצורה אחרת:

$$\frac{\lambda\cdot\varphi+\mu\cdot\psi}{(\lambda+\mu)} \geq \frac{\varphi}{\varphi^{\mu/\lambda+\mu}}\psi^{\mu/\lambda+\mu}$$

$$\frac{\lambda\cdot\varphi+\mu\cdot\psi}{(\lambda+\mu)} \geq \sqrt[\lambda+\mu]{\varphi^{\lambda}\psi^{\mu}}$$

וזה ידוע. מש"ל.

ולכן

$$\left(\frac{\varphi_a}{\psi_a}\right)^{\mu/\lambda+\mu}+\left(\frac{\varphi_b}{\psi_b}\right)^{\mu/\lambda+\mu}+\left(\frac{\varphi_c}{\psi_c}\right)^{\mu/\lambda+\mu} \geq$$

$$\geq \frac{(\lambda+\mu)\varphi_a}{\lambda\cdot\varphi_a+\mu\cdot\psi_a}+\frac{(\lambda+\mu)\varphi_b}{\lambda\cdot\varphi_b+\mu\cdot\psi_b}+\frac{(\lambda+\mu)\varphi_c}{\lambda\cdot\varphi_c+\mu\cdot\psi_c}=$$

$$=\frac{(\lambda+\mu)(\varphi_a+\varphi_b+\varphi_c)}{a+b+c}=\frac{3\cdot(a+b+c)}{a+b+c}=3$$

ובכן , הוכחנו

משפט

אם $\eta \geq \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$ אז אי-שוויון (*) מתקיים .

תרגילים: עבור כל $0 < a,b,c$

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{2/3}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{2/3}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{2/3} \geq 3$$

$$\sqrt[3]{\frac{b+c}{2a}}+\sqrt[3]{\frac{c+a}{2b}}+\sqrt[3]{\frac{a+b}{2c}} \geq 3$$

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

אם $A^{\alpha}+B^{\alpha}+C^{\alpha} \geq 3$ ומתקיים $0<\alpha\leq\beta$ אז $A^{\beta}+B^{\beta}+C^{\beta} \geq A^{\alpha}+B^{\alpha}+C^{\alpha}$.

יהי $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (חתך הזהב) אז

$$\left(\frac{\varphi\cdot a}{b+c}\right)^{1/\varphi}+\left(\frac{\varphi\cdot b}{c+a}\right)^{1/\varphi}+\left(\frac{\varphi\cdot c}{a+b}\right)^{1/\varphi} \geq \varphi^2$$