אי-שוויונות מסוג $\left(\frac{\varphi_a}{\psi_a}\right)^\eta + \left(\frac{\varphi_b}{\psi_b}\right)^\eta + \left(\frac{\varphi_c}{\psi_c}\right)^\eta \geq 3$

נניח כי

$$\varphi(a,b,c) = \alpha_1 \cdot a + \beta_1 \cdot b + \gamma_1 \cdot c$$
$$\psi(a,b,c) = \alpha_2 \cdot a + \beta_2 \cdot b + \gamma_2 \cdot c$$

כאשר $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$, וקיימים $\lambda, \mu > 0$ שעבורם

$$\lambda \cdot \varphi(a,b,c) + \mu \cdot \psi(a,b,c) = a + b + c$$

ונגדיר

$$\varphi_a = \varphi(a,b,c), \varphi_b = \varphi(b,c,a), \varphi_c = \varphi(c,a,b)$$
$$\psi_a = \psi(a,b,c), \psi_b = \psi(b,c,a), \psi_c = \psi(c,a,b)$$

נתעניין ב- a,b,c כאלו ש- $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \psi_a, \psi_b, \psi_c > 0$ (אחרת לא תמיד נוכל להגדיר חזקה).

נתבונן ב אי-שוויונות מהסוג הבא

$$\left(\frac{\varphi_a}{\psi_a}\right)^\eta + \left(\frac{\varphi_b}{\psi_b}\right)^\eta + \left(\frac{\varphi_c}{\psi_c}\right)^\eta \geq 3 \qquad (*)$$

אנו ננסה לחקור מתי אי-שוויון כזה מתקיים.
זה לא תמיד נכון, אבל אפשר להוכיח את זה במקרים מסוימים.

למשל, עבור כל $0 < a,b,c$

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{2/3} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{2/3} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{2/3} \geq 3$$
$$\sqrt[3]{\frac{b+c}{2a}} + \sqrt[3]{\frac{c+a}{2b}} + \sqrt[3]{\frac{a+b}{2c}} \geq 3$$

טענה 1

אם $A^\alpha + B^\alpha + C^\alpha \geq 3$ ומתקיים $0 < \alpha \leq \beta$ אז $A^\beta + B^\beta + C^\beta \geq 3$.

הוכחה.

$$\frac{\alpha \cdot A^\beta + (\beta - \alpha) \cdot 1}{\beta} \geq \sqrt[\beta]{\left(A^\beta\right)^\alpha \cdot 1^{\beta-\alpha}} = A^\alpha$$

נסכם 3 אי-שוויונות מהסוג הזה ונקבל

$$\frac{\alpha \cdot \left(A^\beta + B^\beta + C^\beta\right) + (\beta - \alpha) \cdot 3}{\beta} \geq A^\alpha + B^\alpha + C^\alpha \geq 3$$

לכן

$$\alpha \cdot \left(A^\beta + B^\beta + C^\beta\right) + (\beta - \alpha) \cdot 3 \geq 3\beta$$
$$\alpha \cdot \left(A^\beta + B^\beta + C^\beta\right) \geq 3\alpha$$
$$A^\beta + B^\beta + C^\beta \geq 3$$

מש"ל.

ולכן אם הוכנו עבור $\eta = \eta_0 > 0$ מסוים את (*) אז למעשה הוכחנו, לכל $\eta \geq \eta_0$.

נוכיח את הטענה עבור $\eta = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

טענה 2

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{\mu/\lambda+\mu} \geq \frac{(\lambda+\mu)\varphi}{\lambda\cdot\varphi+\mu\cdot\psi}$$

הוכחה.

נעתיק את אי-שוויון שלנו בצורה אחרת:

$$\frac{\lambda\cdot\varphi+\mu\cdot\psi}{(\lambda+\mu)} \geq \frac{\varphi}{\varphi^{\mu/\lambda+\mu}}\psi^{\mu/\lambda+\mu}$$

$$\frac{\lambda\cdot\varphi+\mu\cdot\psi}{(\lambda+\mu)} \geq \sqrt[\lambda+\mu]{\varphi^{\lambda}\psi^{\mu}}$$

וזה ידוע. מש"ל.

ולכן

$$\left(\frac{\varphi_a}{\psi_a}\right)^{\mu/\lambda+\mu}+\left(\frac{\varphi_b}{\psi_b}\right)^{\mu/\lambda+\mu}+\left(\frac{\varphi_c}{\psi_c}\right)^{\mu/\lambda+\mu} \geq$$

$$\geq \frac{(\lambda+\mu)\varphi_a}{\lambda\cdot\varphi_a+\mu\cdot\psi_a}+\frac{(\lambda+\mu)\varphi_b}{\lambda\cdot\varphi_b+\mu\cdot\psi_b}+\frac{(\lambda+\mu)\varphi_c}{\lambda\cdot\varphi_c+\mu\cdot\psi_c}=$$

$$=\frac{(\lambda+\mu)(\varphi_a+\varphi_b+\varphi_c)}{a+b+c}=\frac{3\cdot(a+b+c)}{a+b+c}=3$$

ובכן , הוכחנו

משפט

אם $\eta \geq \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ אז אי-שוויון (*) מתקיים .

תרגילים: עבור כל $0 < a,b,c$

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{2/3}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{2/3}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{2/3} \geq 3$$

$$\sqrt[3]{\frac{b+c}{2a}}+\sqrt[3]{\frac{c+a}{2b}}+\sqrt[3]{\frac{a+b}{2c}} \geq 3$$

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

אם $A^{\alpha}+B^{\alpha}+C^{\alpha} \geq 3$ ומתקיים $0<\alpha\leq\beta$ אז $A^{\beta}+B^{\beta}+C^{\beta} \geq A^{\alpha}+B^{\alpha}+C^{\alpha}$.

יהי $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (חתך הזהב) אז

$$\left(\frac{\varphi\cdot a}{b+c}\right)^{1/\varphi}+\left(\frac{\varphi\cdot b}{c+a}\right)^{1/\varphi}+\left(\frac{\varphi\cdot c}{a+b}\right)^{1/\varphi} \geq \varphi^{2}$$