משוואות פונקציונאליות

מבוא

משוואות פונקציונאליות הן נושא בעייתי במיוחד במתמטיקה אלמנטרית ובכלל. נכון להיום, יש כלים מצומצמים מאוד בפתרון משוואות פונקציונאליות, המאפשרים לפתור רק מסגרת מצומצמת יחסית של בעיות. להלן מספר גישות בסיסיות לפתרון משוואה פונקציונלית:

1. החלפת משתנים

זוהי הגישה הפשוטה ביותר ועשויה לשמש כחלק מפתרון מורכב יותר. באופן כללי, בהינתן משוואה מהצורה $f\left(g\left(x\right)\right)=h\left(x\right)$ כאשר $g\left(x\right)$ ו- $h\left(x\right)$ הן פונקציות ידועות, אז במידה ול- $g\left(x\right)$ יש פונקציה הפוכה, נסמן $t=g\left(x\right)$. נקבל $f\left(t\right)=h\left(g^{-1}\left(t\right)\right)$ כלומר $f\left(x\right)=h\left(g^{-1}\left(x\right)\right)$.

2. יצירת מספר משוואות

גם פה מדובר בשיטה פשוטה, בה ניתן להשתמש בעיקר כאשר במשוואה מופיעים שני משתנים $f\left(g\left(x\right)\right)$ ו- $f\left(h\left(x\right)\right)$, עבור שני ביטויים אלגבריים שונים $g\left(x\right)$ ו- $h\left(x\right)$. החלפה חכמה תיצור משוואה נוספת עם אותם משתנים, בה ניתן להשתמש גם כן על מנת למצוא את $f\left(x\right)$.

3. סימטריה

אם המשוואה היא סימטרית ביחס למשתנים שלה, ניתן לבצע החלפה שלהם וכך לקבל נתונים נוספים אודות המשתנים.

4. חקירת המשוואה עבור ערכים פרטיים

תמיד כדאי, במידת האפשר ובמיוחד כאשר מדובר במקורות טבעיים, לנסות לבנות את התמונות של הפונקציה. תהליך כזה יאפשר לקבל הבנה עמוקה יותר על המבנה והתכונות של הפונקציה ולתת רמזים על הפתרון.

<u>5. חקירת תכונות הפונקציה</u>

א. האם הפונקציה זוגית? האם היא אי זוגית? (במידה וכן, היקף הבעיה מצטמצם לתחום $x \geq 0$.

ב. האם הפונקציה מחזורית? (במידה וכן, גם פה היקף הבעיה מצטמצם לאינטרוול מסויים בלבד)

ג. האם ישנה התאמה חד חד ערכית? או התאמה מעל?

ד. האם ישנן נקודות סטציונריות? כלומר נקודות עבורן x $f\left(x\right)=x$.

ה. האם ישנן סימטריות בפונקציות עבור ערכים מסוימים?

כל השיטות הללו לא תמיד מועילות. זאת כנראה אחת הסיבות לכך שמשוואות פונקציונאליות הפכו להיות אחת הבעיות הנפוצות בתחרויות ה- IMO. משוואה פונקציונלית מופיעה כמעט כל שנה.

במחקר זה אנו נדון בסוג מסויים וחשוב מאוד של משוואות פונקציונאליות: פונקציות מורכבות. הכוונה היא למשוואות מהצורה $f\left(f\left(x\right)\right)$ בעיקר. נפתור בעיות שונות מהתחום ע"י גישות מגוונות ככל הניתן, על מנת להרחיב את ההבנה על הסוג הזה של משוואות פונקציונאליות.

נפתח בהדגמה של שימוש אלגנטי בתכונות של משוואות פונקציונאלית על-מנת לפתור בעיות אלגבריות לא טריוויאליות.

<u>משפט:</u>

אם $y=f\left(x\right)$ היא פונקציה עולה לכל x אז המשוואות $f\left(x\right)=x$ ו- $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ הן שקולות.

<u>הוכחה:</u>

מובן כי מהשוויון $f\left(x\right)=x$ נובע $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)=x$.

נוכיח כי מ-$f\left(f\left(x\right)\right)=x$ נובע $f\left(x\right)=x$.

נניח כי עבור x_0 מתקיים $f\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0$ וגם $f\left(x_0\right)\neq x_0$. אם $f\left(x_0\right)>x_0$ אז נקבל $f\left(f\left(x_0\right)\right)>f\left(x_0\right)>x_0$, סתירה. אם $f\left(x_0\right)<x_0$ אז נקבל $f\left(f\left(x_0\right)\right)<f\left(x_0\right)<x_0$, סתירה.

כלומר בהכרח מתקיים $f\left(x_0\right)=x_0$.

לפי ההוכחה ניתן להסיק שתי מסקנות:

- אם $y=f(x)$ עולה בתחום מסוים אז המשוואות $f(x)=x$ ו- $f(f(x))=x$ שקולות באותו התחום.
- אם נפעיל את "משפט 1" k פעמים נקבל משפט כללי:

אם $y=f(x)$ היא פונקציה עולה לכל x אז המשוואות $f(x)=x$ ו- $\underbrace{f(f(\dots f}_{k}(x)\dots))=x$ הן שקולות עבור כל $k\in\mathbb{N}$.

שאלה:

האם ניתן לנסח טענה דומה עבור פונקציה היורדת לכל x ?

תשובה:

לא. נתבונן בדוגמת נגד:

$f(x)=-x$ היא פונקציה יורדת לכל x. אנחנו מקבלים $f(f(x))=f(-x)=x$ ולכן לפי עקרונות משפט 1 אנו אמורים לקבל $f(x)=x$, אך מובן כי זו סתירה.

נתבונן בשלוש בעיות אשר ממבט ראשון אינן נראות קשורות למשוואות פונקציונאליות, אך נפתרות בצורה אלגנטית ביותר בעזרת תכונה זו:

I. צירופים של פונקציות.

תרגיל 1.

נתון: $f_1(x)=\dfrac{x-2}{3x+4},\ \ f_2(x)=\dfrac{2x+3}{5x-1}$

מצא את $f_1\circ f_2=f_1(f_2)$ ו- $f_2\circ f_1=f_2(f_1)$

פתרון.

$$f_1\circ f_2=f_1(f_2)=\frac{1\cdot\dfrac{2x+3}{5x-1}-2}{3\cdot\dfrac{2x+3}{5x-1}+4}=\frac{2x+3-10x+2}{6x+9+20x-4}=\frac{5-8x}{5+26x},\ \ x\neq 0.2,\ \ x\neq\frac{-5}{26}$$

$$f_2\circ f_1=f_2(f_1)=\frac{2\cdot\dfrac{x-2}{3x+4}+3}{5\cdot\dfrac{x-2}{3x+4}-1}=\frac{2x-4+9x+12}{5x-10-3x-4}=\frac{11x+8}{2x-14},\ \ x\neq -\frac{4}{3},\ \ x\neq 7$$

ברור, כי $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$.

תרגיל 2.

הוכח, כי לפונקציות $f(x),\ \mathrm{g}(\mathrm{x}),\ \mathrm{h}(\mathrm{x})$ מקיים תנאי הבא:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

II . דוגמאות ברמה גבוה.

תרגיל 3.

מצא כל פונקציות $y = f(x)$ המקיימות

$$2 \cdot f(1-x) + 1 = x \cdot f(x) \qquad (1)$$

נניח, כי קיימת פונקציה $y = f(x)$ כך שמקיימת (1).

מחליפים את x ב-$(1-x)$:
$$2 \cdot f(x) + 1 = (1-x) \cdot f(1-x) \qquad (2)$$

מ-(1) נקבל $f(1-x) = \dfrac{x \cdot f(x) - 1}{2}$:$(2')$.

מציבים את $(2')$ ב-(2):
$$2 \cdot f(x) + 1 = (1-x) \cdot \frac{x \cdot f(x) - 1}{2}$$

מפה נקבל: $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - x + 4}$. אחרי בדיקת התנאי (1) מקיים ל-

תשובה: $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - x + 4}$

<u>כדאי לזכור:</u> בדיקה בפתרון של משוואה פונקציונלית היא חלק מהפתרון כללי. כלומר, בלי בדיקה פתרון אינו מלאה, לפיכך אינו נכון.

תרגיל 4.

מצא כל פונקציות $y = f(x)$ המקיימות
$$x \cdot f(x) + 2 \cdot f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 \qquad (3)$$

פתרון.

נניח, כי קיימת פונקציה $y=f(x)$ כך שמקיימת (3).

1. ב- (3) <u>מחליפים</u> את x ב- $\frac{x-1}{1+x}$. (כלומר, $x \to \frac{x-1}{1+x}$). **נקבל:**

$$\frac{x-1}{1+x}\cdot f\left(\frac{x-1}{1+x}\right)+2\cdot f\left(\frac{\frac{x-1}{1+x}-1}{\frac{x-1}{1+x}+1}\right)=1$$

$$(4):\quad \frac{x-1}{1+x}\cdot f\left(\frac{x-1}{1+x}\right)+2\cdot f\left(\frac{-1}{x}\right)=1$$

2. ב- (3) <u>מחליפים</u> את x ב- $\left(-\frac{1}{x}\right)$. (כלומר, $x \to \left(-\frac{1}{x}\right)$). **נקבל:**

$$\frac{-1}{x}\cdot f\left(\frac{-1}{x}\right)+2\cdot f\left(\frac{\frac{-1}{x}-1}{\frac{-1}{x}+1}\right)=1$$

$$(5):\quad \frac{-1}{x}\cdot f\left(\frac{-1}{x}\right)+2\cdot f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=1$$

3. ב- (3) <u>מחליפים</u> את x ב- $\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$. (כלומר, $x \to \frac{x+1}{1-x}$). **נקבל:**

$$\frac{x+1}{1-x}\cdot f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+2\cdot f\left(\frac{\frac{x+1}{1-x}-1}{\frac{x+1}{1-x}+1}\right)=1$$

$$(6):\quad \frac{x+1}{1-x}\cdot f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+2\cdot f(x)=1$$

בסוף-סוף קיבלנו מערכת מתוך 4 משוואות: $\{(3),\ (4),\ (5),\ (6)\}$ **ו- 4 נעלמים:**

$$\left\{f(x),\ f\left(\frac{x+1}{1-x}\right),\ f\left(-\frac{1}{x}\right),\ f\left(\frac{x-1}{1+x}\right)\right\}$$

נקבל: $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x^2-5x}$ בתחום הבא: $x\neq -1,\ x\neq 0,\ x\neq 1$

5. אחרי בדיקת התנאי (3) מקיים ל-

תשובה: $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x^2-5x}$

תרגיל 5.

פתור את המשוואה $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$.

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי תחום ההגדרה של המשוואה הוא $x\ge 0$.

נרשום את המשוואה כך $x=1+\sqrt{1+\sqrt{x}}$. נסמן $f(x)=1+\sqrt{x}$. זו פונקציה עולה עבור כל $x\ge 0$.

נשים לב שמתקיים $f(f(x))=1+\sqrt{1+\sqrt{x}}=x$, ולכן לפי משפט 1 ניתן להסיק $f(x)=x$.

נקבל $x=1+\sqrt{x}$. הפתרון של משוואה זו הוא $\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, כלומר $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

תרגיל 6.

פתור את המשוואה $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

<u>פתרון:</u>

נעלה בחזקה שלישית ונקבל $x=\frac{1+\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3}{2}$. ברשותנו בעצם משוואה מסוג $f(f(x))=x$

כאשר $f(x)=\frac{x^3+1}{2}$. מכיוון שמתקיים $f'(x)=\frac{3x^2}{2}>0$ עבור כל x נקבל כי $f(x)$ הינה

פונקציה עולה לכל x. לפי משפט 1 נקבל שמתקיים $f(x)=\frac{x^3+1}{2}=x$. משוואה זו שקולה

למשוואה $(x-1)(x^2+x-1)=0$ שפתרונותיה הם $1,\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

תרגיל 7.

פתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x^3+2x^2+2x=y \\ y^3+2y^2+2y=z \\ z^3+2z^2+2z=x \end{cases}.$$

<u>פתרון:</u>

נתבונן בפונקציה $f\left(t\right)=t^3+2t^2+2t$. מכיוון ש- $f'\left(t\right)=2t^2+4t+2>0$ עבור כל t, נקבל כי $f\left(t\right)$ פונקציה עולה לכל t.

ניתן לרשום את המערכת כך:

$$\begin{cases} f\left(x\right)=y \\ f\left(y\right)=z \\ f\left(z\right)=x \end{cases}.$$

ע"י הצבה נקבל $x=f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)$.

מכיוון ש- $f\left(t\right)$ פונקציה עולה לכל t, וגם $x=f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)$, לפי משפט 1 ניתן להסיק כי $f\left(x\right)=x$.

כלומר $x^3+2x^2+2x=x$, השקולה למשוואה $0=x\left(x^2+2x+1\right)=x\left(x+1\right)^2$ שפתרונותיה הם $x_1=0, x_2=-1$. לאחר מכן ע"י הצבה נקבל שפתרונות המערכת הם: $\left(0,0,0\right),\left(-1,-1,-1\right)$.

נעבור לבעיות ברמה גבוהה יותר – בעיות מאולימפיאדות שונות.

<u>בעיה</u> ** (DORON LEVIN-PETER S.)

חקר (מתוך תחרות Kvant 2007):

פרופסור מומבום-פלומבום כתב תוכנה שיכולה לחשב את ערך הפונקציה שהמציא: $mumb(x)$. הפרופסור טוען, שאם להזין לתוכנה מספר כלשהו x וללחוץ על "OK", במקומו יופיע הערך $mumb(x)$. עם זאת, כאשר הכפתור "OK" יילחץ שוב, אז כתוצאה משתי הלחיצות הנ"ל יתקבל

הביטוי $3|x|-4$. האם הפרופסור התבלבל? מה תראה התוכנה אם נזין את המספר $x=0.8$ ונלחץ פעם אחת על "OK"?

<u>פתרון:</u>

נסמן $f(x)=mumb(x)$ וכן $f(f(x))=3|x|-4=g(x)$.

נפתור את המשוואה $g(x)=3|x|-4=x$. פתרונותיה יהיו $x_1=-1$, $x_2=2$.

נפתור את המשוואה $g(g(x))=3|3|x|-4|-4=x$. נקבל $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=0.8$, $x_4=-1.6$.

נסמן

$$\begin{cases} f(0.8)=w \\ f(-1.6)=z \end{cases}$$

מפה נקבל

$$f(w)=f(f(0.8))=-1.6 \Rightarrow f(f(w))=\underline{\underline{g(w)}}=f(-1.6)=\underline{\underline{z}}$$

$$f(z)=f(f(-1.6))=0.8 \Rightarrow f(f(z))=\underline{\underline{g(z)}}=f(0.8)=\underline{\underline{w}}$$

ואז $g(g(z))=g(w)=z$, כלומר z הוא אחד מפתרונות המשוואה $g(g(x))=3|3|x|-4|-4=x$, אז $z\in\{-1,2,0.8,-1.6\}$.

1. נניח $z=-1.6$, אז $f(-1.6)=-1.6$. מפה $f(f(-1.6))=-1.6$. מצד שני, $f(f(-1.6))=f(f(z))=g(-1.6)=0.8$. סתירה.
2. נניח $z=0.8$. אז $f(-1.6)=0.8$. מפה $f(0.8)=f(z)=f(f(-1.6))=0.8$. מצד שני $f(0.8)=w=g(0.8)=-1.6$. סתירה.
3. נניח $z=-1$, אז $f(-1.6)=-1$. נקבל $g(-1)=-1$. מפה $g(-1)=g(z)=w=f(0.8)=-1$. כלומר $f(f(0.8))=f(-1)=f(f(-1.6))$ אז $-1.6=f(-1)=0.8$, סתירה.
4. נניח $z=2$ (נבצע תהליך זהה ל- 3).

קיבלנו סתירה לקיום הפונקציה $f(x)$ בנקודות $x=-1.6,0.8$, לכן כאשר נזין למחשבון את הערך $x=2007$, ונקיש פעם יחידה על המקש Enter, נקבל הודעת שגיאה – Error.

תרגיל 8.

פתור את המשוואה $f\left(f\left(x\right)\right)=x^2-c$ כאשר $f\left(x\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

<u>פתרון:</u>

נתבונן כיצד בנוי המסלול של $x\to g\left(x\right)=x^2-c$, כלומר נחקור את הסדרה $x\to g\left(x\right)\to g\left(g\left(x\right)\right)\to g\left(g\left(g\left(x\right)\right)\right)\to\ldots$ (למעשה, לפתרון הבעיה יש להתבונן בסדרה עד $g\left(g\left(x\right)\right)$).

1. למשוואה $g\left(x\right)=x$, או $x=\left(x^2-c\right)$ יש 2 פתרונות שונים עבור $\Delta=1+4c>0$, כלומר עבור $c>-0.25$. כלומר עבור $c>-0.25$ למשוואה $g\left(x\right)=x$ יש 2 נקודות נייחיות $x_1=a$ ו- $x_2=b$. נתבונן כעת במשוואה $g\left(g\left(x\right)\right)=x$, ונקבל $\left(x^2-c\right)^2-c=x$ או $x^4-2x^2c+c^2-c-x=0$.
2. לצורך פירוק המשוואה האחרונה, נתבונן בטרינום הריבועי כפונקציה של c : $y(c)=c^2-\left(2x^2+1\right)\cdot c+\left(x^4-x\right)$. מפה $\Delta_1\left(x\right)=\underline{4x^4}+4x^2+1-\underline{4x^4}+4x=\left(2x+1\right)^2$, אז
$$x^4-2x^2c+c^2-c-x=\left(c-\frac{2x^2+1-2x-1}{2}\right)\cdot\left(c-\frac{2x^2+1+2x+1}{2}\right)=$$
$$=\left(c-x^2+x\right)\cdot\left(c-x^2-x-1\right)$$
לגורם $c-x^2+x=0$ כבר הגדרנו 2 שורשים שונים: עבור $c>-0.25$ הם $x_1=a$ ו- $x_2=b$. עבור $c>0.75$ למשוואה $c-x^2-x-1=0$ יש 2 שורשים נוספים: $x_3=v$ והם $x_4=u$. כלומר $g\left(g\left(u\right)\right)=u$ וגם $g\left(g\left(v\right)\right)=v$.

<u>טענה 1</u>:

אם $g\left(a\right)=a,\ g\left(b\right)=b,\ g\left(g\left(a\right)\right)=a,\ g\left(g\left(b\right)\right)=b,\ g\left(g\left(u\right)\right)=u,\ g\left(g\left(v\right)\right)=v$ אז $g\left(u\right)=v$ וגם $g\left(v\right)=u$.

<u>הוכחת טענה 1</u>:

נניח כי $g\left(u\right)=t$. אז $\underline{\underline{g\left(t\right)}}=g\left(g\left(u\right)\right)=\underline{\underline{u}}$. בנוסף, $g\left(g\left(t\right)\right)=g\left(u\right)=t$. קיבלנו כי $g\left(g\left(t\right)\right)=t$.

אבל הפתרונות היחידים של המשוואה הם a,b,u,v לכן $t\in\left\{a,b,u,v\right\}$. אם $t=a$ אז

$u \Leftarrow g(g(u))=g(a) \Rightarrow a$ לכן $a=u$, סתירה. כנ"ל לגבי b. אם $t=u$ אז למשוואה $g(x)=x$ יש פתרון נוסף u - סתירה. נותר כי $t=v$. אותו התהליך נבצע עבור $g(v)=t$. מ.ש.ל.

מפה נסיק כי לפונקציה g יש מסלול יחיד מסדר 2 והוא $u \to v \to u$, כאשר $x \in \Re$.

נתבונן כעת במשוואה $f(f(x))=g(x)$. נניח

$$\begin{cases} f(u)=w \\ f(v)=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(w)=f(f(u))=g(u)=v \\ f(z)=f(f(v))=g(v)=u \end{cases}$$

כלומר מקבלים כי עבור הפונקציה $f(x)$ קיים המסלול היחיד מסדר 4: $u \to w \to v \to z \to u$.

נתבונן בביטויים הבאים:

$$\begin{cases} g(u)=f(f(u))=v \\ g(v)=f(f(v))=u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(w)=v \\ f(z)=u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(f(w))=g(w)=f(v)=z \\ f(f(z))=g(z)=f(u)=w \end{cases}$$

כלומר קיבלנו מסלול חדש מסדר 2 עבור הפונקציה $g(x)$: $w \to z \to w$. אם נוכיח כי w ו- שונים מ- u ו- v נקבל סתירה (כפי שהראנו כי המסלול $u \to v \to u$ הוא היחיד).

<u>הוכחה</u>:

נניח כי. נקבל:

$$f(w)=f(u) \Rightarrow v=w \Rightarrow f(v)=f(w) \Rightarrow \underline{\underline{z=v}} \Rightarrow f(z)=f(v) \Rightarrow \underline{\underline{u=z}}$$

אזי נקבל כי $z=u=v$, סתירה.

נניח כי $w=v$. נקבל:

$$f(w)=f(v) \Rightarrow v=z \Rightarrow f(v)=f(z) \Rightarrow z=u \Rightarrow f(z)=f(u) \Rightarrow \underline{\underline{u=w}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(u)=f(w) \Rightarrow \underline{\underline{w=v}}$$

אזי נקבל כי $w=u=v$, סתירה.

את אותו תהליך נבצע עבור $z=u$ ו- $w=u$.

מ.ש.ל. קיבלנו סתירה לקיום הפונקציה $f(x)$.

תרגיל 9.

מצא פונקציה $f(x)$ ותחום הגדרה שלה כך שהתנאי $f(f(x))=x^2-2$ מתקיים על הקטע $\left[1\frac{1}{2},2\right]$.

<u>פתרון:</u>

נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}$ בתחום $x\in\left[1.5,\ 2\right)$. כאן $\left\{x\right\}=x-\left[x\right]$ הוא ערך השבר של x. ברור כי מתקיימים האי שיוויונים הבאים:

$$\left(1.5\le x<2\right)\Leftrightarrow\left(1.5^{\sqrt{2}}\le x^{\sqrt{2}}<\ 2^{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow\left(2\cdot1.5^{\sqrt{2}}\le2\cdot x^{\sqrt{2}}<\ 2\cdot2^{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{2\cdot2^{\sqrt{2}}}<\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\le\frac{1}{2\cdot1.5^{\sqrt{2}}}<1$$

כאשר $x\in\left[1.5,\ 2\right)$ נקבל

$$f\left(x\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{x^{\sqrt{2}}}$$

לפיכך

$$f\left(f\left(x\right)\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left(2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}\right)^{\sqrt{2}}}\right\}\text{ או }f\left(f\left(x\right)\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left(f\left(x\right)\right)^{\sqrt{2}}}\right\}$$

כלומר אם

$$\left(1.5\le x<2\right)\Rightarrow\left(2.25\le x^2<4\right)\Rightarrow\left(1<\frac{2.25}{2}\le\frac{x^2}{2}<2\right)$$

אזי

$$f(f(x))=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left(2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}\right)^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\left\{\frac{x^2}{2}\right\}=2\cdot\left(\frac{x^2}{2}-1\right)=x^2-2$$

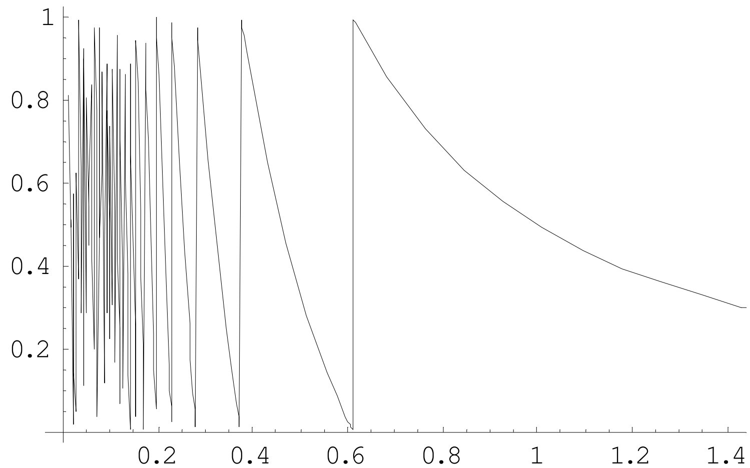
כלומר

$$D\left(f\left(x\right)\right)=\left(0,\ +\infty\right)\text{ וכן }f\left(x\right)=\begin{cases}2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}, & 0<x\ne2\\ 2, & x=2\end{cases}$$

או

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2, & x\in\left[1.5;2\right]\\ x-2, & x\in\left[2.25;4\right]\end{cases}$$

להן גרף הפונקציה



לפי דרך אחרת, אם $x\in\left(-2,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\ 2\right)$ ו- $f\left(x\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\right\}$ אזי

$$\left(\sqrt{2}<|x|<2\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}<|x|^{\sqrt{2}}<2^{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow\left(2\cdot\sqrt{2}^{\sqrt{2}}<2\cdot|x|^{\sqrt{2}}<2\cdot2^{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{2\cdot2^{\sqrt{2}}}<\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\le\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}<1$$

לכן עבור $x\in\left(-2,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\ 2\right)$ נקבל

$$f\left(x\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{|x|^{\sqrt{2}}}$$

וכן

$$f\left(f\left(x\right)\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left|f\left(x\right)\right|^{\sqrt{2}}}\right\}$$

או

$$f\left(f\left(x\right)\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left|2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\right\}\right|^{\sqrt{2}}}\right\}$$

לכן עבור

$$\left(\sqrt{2}<|x|<2\right)\Rightarrow\left(2<x^2<4\right)\Rightarrow\left(1<\frac{x^2}{2}<2\right)$$

נקבל

$$f(f(x))=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left|2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}\right|^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left|\frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\right|^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\left\{\frac{x^2}{2}\right\}=2\cdot\left(\frac{x^2}{2}-1\right)=x^2-2$$

כלומר

$$f(x)=\begin{cases}2\cdot\left\{\dfrac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\right\}, & 0<|x|\neq 2\\ 2, & |x|=2\end{cases}$$

תרגיל 10.

האם קיימות פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שיתקיים

א. $$\forall x:\quad \begin{cases}f(g(x))=x^2\\ g(f(x))=x^3\end{cases}$$

ב. $$\forall x:\quad \begin{cases}f(g(x))=x^2\\ g(f(x))=x^4\end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

א. נניח בשלילה כי פונקציות כאלה אכן קיימות. מהנתונים נובע

$$g(f(x))=x^3\ \Rightarrow f(x^3)=f(g(f(x)))\ \Rightarrow f(x^3)=[f(x)]^2$$

נקבל

$$1)\quad [f(0)]^2=f(0)\ \Rightarrow\ f(0)\in\{0,1\};$$

$$2)\quad [f(1)]^2=f(1)\ \Rightarrow\ f(1)\in\{0,1\};$$

$$3)\quad [f(-1)]^2=f(-1)\ \Rightarrow\ f(-1)\in\{0,1\}$$

כלומר האיברים $a_1=f(0);\ a_2=f(-1);\ a_3=f(1)$ שייכים כולם לקבוצה $\{0,1\}$. לפי עקרון שובך היונים, נקבל כי שני מספרים מהקבוצה $\{f(0);\ f(-1);\ f(1)\}$ מתלקדים. אבל מצד שני, מהנתון נובע גם כי

$$4)\quad g\left(f\left(0\right)\right)=0$$

$$5)\quad g\left(f\left(-1\right)\right)=-1$$

$$6)\quad g\left(f\left(1\right)\right)=1$$

כלומר כל הערכים $f(0);\ f(-1);\ f(1)$ שונים זה מזה. סתירה. הפונקציות המבוקשות לא קיימות.

ב. פונקציות כאלה קיימות. לדוגמא:

$$\begin{cases} f(x)=0, & x=0 \\ f(x)=e^{2\cdot\sqrt{\ln|x|}}, & |x|\ge 1 \\ f(x)=e^{-2\cdot\sqrt{|\ln|x||}}, & |x|<1\ \&\ x\ne 0 \end{cases}$$

וכן

$$\begin{cases} g(x)=0, & x=0 \\ g(x)=e^{\ln^2|x|}, & |x|\ge 1 \\ g(x)=e^{-\ln^2|x|}, & |x|<1\ \&\ x\ne 0 \end{cases}$$

הנמקה:

$$\begin{cases} f\left(g\left(0\right)\right)=f\left(0\right)=0^2=0, \\ f\left(g\left(x\right)\right)=e^{2\cdot\sqrt{\ln\left|e^{\ln^2|x|}\right|}}=e^{2\cdot\sqrt{\ln e^{\ln^2|x|}}}=e^{2\cdot\sqrt{\ln^2|x|}}=e^{2\cdot|\ln|x||}=e^{2\cdot\ln x}=x^2, & |x|\ge 1 \\ f\left(g\left(x\right)\right)=e^{-2\cdot\sqrt{\left|\ln\left|e^{\ln^2|x|}\right|\right|}}=e^{-2\cdot\sqrt{\left|\ln e^{\ln^2|x|}\right|}}=e^{-2\cdot\sqrt{\ln^2|x|}}=e^{-2\cdot|\ln|x||}=e^{2\cdot\ln|x|}=x^2, & |x|<1,\ x\ne 0 \end{cases}$$

וכן

$$\begin{cases} g(x)=0, & x=0 \\ g\left(f\left(x\right)\right)=e^{\ln^2\left|e^{2\cdot\sqrt{\ln|x|}}\right|}=e^{\ln^2 e^{2\cdot\sqrt{\ln|x|}}}=e^{\left[2\cdot\sqrt{\ln|x|}\right]^2}=e^{4\cdot\ln|x|}=x^4, & |x|\ge 1 \\ g\left(f\left(x\right)\right)=e^{-\ln^2\left|e^{-2\cdot\sqrt{|\ln|x||}}\right|}=e^{-\left[-2\cdot\sqrt{|\ln|x||}\right]^2}=e^{-4\cdot|\ln|x||}=e^{4\cdot\ln|x|}=x^4, & |x|<1,\ x\ne 0 \end{cases}$$

מ.ש.ל.

השיטה למציאת הפונקציה:

נשים לב כי

$$f\left(g\left(x\right)\right)=x^2 \;\Rightarrow\; g\left(x^2\right)=g\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right) \;\Rightarrow\; g\left(x^2\right)=\left[g\left(x\right)\right]^4$$

כעת מובן כי $\forall x\in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{cases} g\left(x\right)=\sqrt[4]{g\left(x^2\right)} \;\;\&\;\; g\left(x^2\right)\ge 0 \;\Rightarrow\; \underline{g\left(-x\right)}=\sqrt[4]{g\left(\left(-x\right)^2\right)}=\sqrt[4]{g\left(x^2\right)}\;=\underline{g\left(x\right)} \\ g\left(x\right)=-\sqrt[4]{g\left(x^2\right)} \;\;\&\;\; g\left(x^2\right)\ge 0 \;\Rightarrow\; \underline{g\left(-x\right)}=-\sqrt[4]{g\left(\left(-x\right)^2\right)}=-\sqrt[4]{g\left(x^2\right)}\;\underline{=g\left(x\right)} \end{cases}$$

כלומר $g\left(-x\right)=g\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ היא פונקציה זוגית.

באופן דומה, $\forall x\in \mathbb{R}$ מתקיים

$$g\left(f\left(x\right)\right)=x^4 \;\Rightarrow\; f\left(x^4\right)=f\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right) \;\Rightarrow\; f\left(x^4\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2$$

לכן

$$\begin{cases} f\left(x\right)=\sqrt{f\left(x^4\right)} \;\;\&\;\; f\left(x^4\right)\ge 0 \Rightarrow \underline{f\left(-x\right)}=\sqrt{f\left(\left(-x\right)^4\right)}=\sqrt{f\left(x^4\right)}\;=\underline{f\left(x\right)} \\ f\left(x\right)=-\sqrt{f\left(x^4\right)} \;\;\&\;\; f\left(x^4\right)\ge 0 \Rightarrow \underline{f\left(-x\right)}=-\sqrt{f\left(\left(-x\right)^4\right)}=-\sqrt{f\left(x^4\right)}\;\underline{=f\left(x\right)} \end{cases}$$

כלומר $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$, $f\left(x\right)$ היא פונקציה זוגית.

מסיבה זאת, נרשה לעצמנו להתבונן רק בתחום $x\ge 0$, למשל. קיבלנו קודם

$$f\left(x\right)=\left[f\left(\sqrt[4]{x}\right)\right]^2 \;\text{וכן}\; g\left(x\right)=\left[g\left(\sqrt{x}\right)\right]^4$$

<u>ניתן להצדיק זאת ע"י בדיקה לצד התנאים:</u>

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\left[f\left(\sqrt[4]{g\left(x\right)}\right)\right]^2=\left[f\left(\sqrt[4]{\left[g\left(\sqrt{x}\right)\right]^4}\right)\right]^2=\left[f\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)\right]^2=x^2$$

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\left[g\left(\sqrt{f\left(x\right)}\right)\right]^4=\left[g\left(\sqrt{\left[f\left(\sqrt[4]{x}\right)\right]^2}\right)\right]^4=\left[g\left(f\left(\sqrt[4]{x}\right)\right)\right]^4=x^4$$

נתבונן למשל בתחום $x>1$:

$$g\left(x^2\right)=\left[g\left(x\right)\right]^4$$

נקבל

$$\forall g\left(x\right)>0 \;\Rightarrow\; \ln g\left(x^2\right)=\ln\left[g\left(x\right)\right]^4 \;\Rightarrow\; 4\cdot \ln g\left(x\right)=\ln g\left(x^2\right)$$

נסמן

$$G_1(x)=\ln\left(g(x)\right) \;\Rightarrow\; G_1\left(x^2\right)=\ln\left(g\left(x^2\right)\right) \;\Rightarrow\; 4\cdot G_1(x)=G_1\left(x^2\right)$$

נציג

$$G_1(x)=G_2(x)\cdot\ln x$$

מה שיתן לנו

$$4\cdot G_2(x)\cdot\ln x=G_2\left(x^2\right)\cdot\ln x^2 \;\Rightarrow\; 4\cdot G_2(x)\cdot\ln x=G_2\left(x^2\right)\cdot 2\cdot\ln x$$

עבור $\ln x\neq 0$ נקבל

$$4\cdot G_2(x)\cdot\ln x=G_2\left(x^2\right)\cdot\ln x^2 \;\Rightarrow\; 2\cdot G_2(x)=G_2\left(x^2\right)$$

כעת נציג

$$G_2(x)=G_3(x)\cdot\ln x$$

מה שיתן לנו

$$2\cdot G_3(x)\cdot\ln x=G_3\left(x^2\right)\cdot\ln x^2 \;\Rightarrow\; 2\cdot G_3(x)\cdot\ln x=G_3\left(x^2\right)\cdot 2\cdot\ln x$$

עבור $\ln x\neq 0$ נקבל

$$G_3(x)=G_3\left(x^2\right)$$

מכאן ברור שעבור $x>1$ נקבל

$$G_3(x)=G_3\left(\sqrt{x}\right)$$

באופן דומה נוכל לקבל

$$G_3(x)=G_3\left(\sqrt{x}\right)=G_3\left(\sqrt[4]{x}\right)=G_3\left(\sqrt[8]{x}\right)=G_3\left(\sqrt[16]{x}\right)=\ldots=G_3\left(\sqrt[2^n]{x}\right)=\ldots$$

אם נניח כי הפונקציות שאנו מחפשים הן רציפות בתחום המבוקש, לכל x בתחום נוכל לומר

$$G_3(x)=\lim_{n\to\infty}G_3\left(\sqrt[2^n]{\mathrm{x}}\right)=G_3\left[\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[2^n]{\mathrm{x}}\right)\right]=G_3(1)=\mathrm{const}$$

לצורך העניין, נניח כי $G_3(1)=1$. נקבל מפה

$$G_3(x)=1\Rightarrow G_2(x)=\ln x \;\Rightarrow\; G_1(x)=(\ln x)^2 \;\Rightarrow\; g(x)=e^{\ln^2 x}$$

לכן $g(x)=e^{\ln^2 x}$. אם

$$g\left(f(x)\right)=x^4 \;\Rightarrow\; e^{\ln^2 f(x)}=x^4 \;\Rightarrow\; \ln^2 f(x)=4\cdot\ln x \;\Rightarrow\; \left|\ln f(x)\right|=2\cdot\sqrt{\ln x}$$

עבור $x>1$ נקבל $f\left(x\right)=e^{2\cdot\sqrt{\ln x}}$. מובן כי עבור מקרים אחרים נקבל פונקציות אחרות.

תרגיל 11.

האם קיימות פונקציות $y(x)$ ו- $f(x)$ עוברן מתקיימים שני התנאים שלהלן:

1. עבור $x\in(a,b)$ מתקיים $y(x)=f(x)$
2. עבור $x\in(a,b)$ מתקיים $y(f(x))\neq f(f(x))$

<u>פתרון:</u>

נתבונן בפונקציות $f\left(x\right)=x-1;\ y\left(x\right)=|x|-1$ על השדה $\mathbb{R}$. עבור $x\in[0;1]$ מובן שמתקיים $y(x)=f(x)$. מצד שני, עבור $x\in[0;1]$

$$y(f(x))=|f(x)|-1=|x-1|-1=1-x-1=-x$$

$$f(f(x))=f(x)-1=x-1-1=x-2$$

כלומר $y(f(x))\neq f(f(x))$. מ.ש.ל.

תרגיל 12.

מצאו את קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ יתקיים

$$f\left(f\left(x+y\right)\right)=f\left(x+y\right)+f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)-x\cdot y$$

<u>פתרון:</u>

נתבונן בנתון עבור $x=0,\ \ y=0$. נקבל

$$f\left(f\left(0\right)\right)=f\left(0\right)+f\left(0\right)\cdot f\left(0\right)\qquad(1)$$

נסמן $f(0)=a$. אז מהשוויון (1) נובע

$$f\left(a\right)=a+a^2\qquad(2)$$

נתבנן בנתון עבור $y=0$:

$$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+f\left(x\right)\cdot f\left(0\right)\qquad(3)$$

נתבונן בשיוויון (3) ע"י החלפת המשתנה x ב- $(x+y)$:

$$f\left(f(x+y)\right)=f(x+y)+f(x+y)\cdot f(0) \qquad (4)$$

מהנתון שלנו ומהשיוויון (4) נקבל

$$f(x+y)+f(x)\cdot f(y)-x\cdot y=f(x+y)+f(x+y)\cdot f(0)$$

מפה נובע

$$\begin{cases} f(x)\cdot f(y)-x\cdot y=f(x+y)\cdot f(0) \\ a\cdot f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-x\cdot y \end{cases} \qquad (5)$$

וכן

$$\begin{cases} f(x+y)=\dfrac{f(x)\cdot f(y)-x\cdot y}{a} \\ a\neq 0 \end{cases} \qquad (6)$$

כעת נתבונן בשני מקרים:

1. $a=0$
2. $a\neq 0$

במקרה הראשון נקבל מ- (5) עבור $x=y$:

$$f(x)\cdot f(x)-x\cdot x=f(x+x)\cdot a \qquad (7)$$

כלומר

$$f^2(x)-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=x, & (8) \\ f(x)=-x & (9) \end{array}\right.$$

את שני הפתרונות שהתקבלו לעיל יש לבדוק בעזרת המשוואה הנתונה.

במקרה של (8) נקבל

$f\left(f(x+y)\right)=f(x+y)=x+y$ וכן

$$f(x+y)+f(x)\cdot f(y)-x\cdot y=x+y+x\cdot y-x\cdot y=x+y$$

כלומר $f\left(f(x+y)\right)=f(x+y)+f(x)\cdot f(y)-x\cdot y$

לכן $f(x)=x$ הוא פתרון כללי לשאלה הנתונה.

במקרה של (9), נציב $f(x)=-x$ למשוואה הנתונה ונקבל:

$$f\left(f\left(x+y\right)\right)=-f\left(x+y\right)=x+y$$ וכן

$$f\left(x+y\right)+f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)-x\cdot y=-\left(x+y\right)+\left(-x\right)\cdot\left(-y\right)-x\cdot y=-\left(x+y\right)$$

כלומר $f\left(f\left(x+y\right)\right)\neq f\left(x+y\right)+f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)-x\cdot y$, לכן $f(x)=-x$ אינו פתרון של המשוואה.

כעת נתבונן במקרה של $a\neq 0$. עבור המשוואה $a\cdot f\left(x+y\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)-x\cdot y$ מ- (5), נבנה טבלה של ערכים, כאשר $f(0)=a$:

$f(1)=x_3,\ f(2)=x_4,\ \ f(-1)=x_2,\ \ f(-2)=x_1$ $(a\neq 0)$	$a\cdot f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-x\cdot y$ $(a\neq 0)$	y	x
$a\cdot x_4=x_3^2-1$	$a\cdot f(2)=f(1)\cdot f(1)-1$	1	1
$a^2=x_3\cdot x_2+1$	$a\cdot f(0)=f(1)\cdot f(-1)+1$	-1	1
$a^2=x_4\cdot x_1+4$	$a\cdot f(0)=f(2)\cdot f(-2)+4$	-2	2
$a\cdot x_1=x_2^2-1$	$a\cdot f(-2)=f(-1)\cdot f(-1)-1$	-1	-1
$a\cdot x_3=x_4\cdot x_2+2$	$a\cdot f(1)=f(2)\cdot f(-1)+2$	-1	2

כך אנו מקבלים מערכת של 5 משוואות. נשתמש בהצבה:

$$x_4=\frac{x_3^2-1}{a}\quad(1')$$

$$a^2=x_3\cdot x_2+1\Leftrightarrow x_3\cdot x_2=a^2-1\quad(2')$$

$$x_1=\frac{x_2^2-1}{a}\quad(4')$$

$$a^2=x_4\cdot x_1+4\Leftrightarrow\quad a^2=\frac{x_2^2-1}{a}\cdot\frac{x_3^2-1}{a}+4\quad\Leftrightarrow\quad a^4=\left(x_2^2-1\right)\cdot\left(x_3^2-1\right)+4\cdot a^2\quad(3')$$

$$a\cdot x_3=x_4\cdot x_2+2\Leftrightarrow\quad a\cdot x_3=\frac{x_3^2-1}{a}\cdot x_2+2\quad\Leftrightarrow a^2\cdot x_3=\left(x_3^2-1\right)\cdot x_2+2\cdot a\quad(5')$$

נחבר את $(5')$ ואת $(2')$:

$$a^2 \cdot x_3 = \left(x_3^2 - 1\right) \cdot x_2 + 2 \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad x_3 \cdot \left(x_3 \cdot x_2 - a^2\right) - x_2 + 2 \cdot a = 0 \;\Leftrightarrow\; x_3 + x_2 = 2 \cdot a$$

נתבונן על המשוואה הנ"ל יחד עם $(2')$:

$$\begin{cases} x_3 + x_2 = 2 \cdot a \\ x_3 \cdot x_2 = a^2 - 1 \end{cases}$$

ללא הגבלת הכלליות, נקבע כי

$$\begin{cases} x_2 = a - 1 \\ x_3 = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2^2 - 1}{a} = a - 2 \\ x_4 = \dfrac{x_3^2 - 1}{a} = a + 2 \end{cases}$$

$f(0) \neq 0$	$x_4 = f(2)$	$x_3 = f(1)$	$x_2 = f(-1)$	$x_1 = f(-2)$
a	$a+2$	$a+1$	$a-1$	$a-2$

נתבונן כעת שוב במשוואה הנתונה עבור $x = y = 1$. נקבל

$$f\left(f\left(1+1\right)\right) = f\left(1+1\right) + f\left(1\right) \cdot f\left(1\right) - 1 \cdot 1$$

נשתמש ב- (2) ו- (6) עבור האגף השמאלי של המשוואה ונקבל:

$$f(f(1+1)) = f(f(2)) = f(a+2) = \frac{f(a) \cdot f(2) - 2 \cdot a}{a} = \frac{\left(a + a^2\right) \cdot (a+2) - 2 \cdot a}{a} = a^2 + 3 \cdot a$$

באגף הימני נקבל עבור $x = y = 1$:

$$f\left(x+y\right) + f\left(x\right) \cdot f\left(y\right) - x \cdot y = f\left(2\right) + f\left(1\right) \cdot f\left(1\right) - 1 = \left(a+2\right) + \left(a+1\right)^2 - 1 = a^2 + 3 \cdot a + 2$$

סתירה.

כלומר עבור $(a \neq 0)$ אין פתרון.

תשובה: $f(x) = x$.

הערה: את אותו התשובה ניתן לקבל גם בקומבינציה אחרת של שורשים:

$f(0) \neq 0$	$x_4 = f(2)$	$x_3 = f(1)$	$x_2 = f(-1)$	$x_1 = f(-2)$
a	$a-2$	$a-1$	$a+1$	$a+2$

תרגיל 13.

יהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך שמתקיים $f(n+1)>f(n)$ ומתקיים $f(f(n))=3n$ לכל n. מצאו את $f(2001)$.

פתרון:

עלינו ראשית לשים לב לעובדה כי $f(t)\ge t$. נמצא תחילה את $f(1)$. נניח כי $f(1)=1$. במקרה זה $f(f(1))=f(1)=1$, אבל גם לפי הנתון זה $f(f(1))=3$. נניח כי $f(1)=n\ge 3$ מפה $f(n)=3$. זוהי סתירה לנתון. לכן $f(1)=2$.

כעת נבנה איברים הבאים בפונקציה

$$f(1)=2;$$
$$f(2)=f(f(1))=3;$$
$$f(3)=f(f(2))=6;$$
$$f(4)=7;$$
$$f(5)=8;$$
$$f(6)=f(f(3))=9;$$
......

את התמונות של 4 ו- 5 מסיקים, כיוון שישנן 2 מספרים בלבד בין 6 ל- 9.

ניתן להבחין עכשיו בחוקיות: ישנם קטעים בהם יש הפרשים של 3, ויש עם הפרשים של 1 (אין עוד אופציות). ניתן לראות זאת בגלל שכרגע יש סדרה של עוקבים (6-9), ואם נמשיך, המקור יתלכד עם הסדרה זו ואז תיווצר סדרה של הפרשים של 3 (כי זה 3 כפול המקור של המקור, לפי הנתון). אם נמשיך, נגיע למצב בו עברנו במקור לערכים שהם התמונה של הפרשי 3, ואז יתקבל כל איבר שלישי, ולאחר ההשלמה (כמו ב-4,5) שוב תיווצר סדרה של עוקבים. כדי למצוא את $f(2001)$ צריך לבדוק באיזה תווך היא נמצאת (של סדרה "3" או "1").

כדי לגלות את זה, ניתן להבחין שיש סדרה של איברים "משותפים" ל-"3" ו-"1".

נוכיח שהם סדרה של מקורות ותמונות. נניח ש - k הוא מקור כזה, אז ההחלפה תתבצע כשנגיע במקורות לתמונה של k, כי אז יש החלפה בין הסדרות הקודמות. האיבר הראשון הוא: 3 ואז 6. לפי הנתון $f(f(n))=3n$, הסדרה תהיה מהסוג: $3^p,2\cdot 3^p,3^{p+1},2\cdot 3^{p+1}...$. ניתן לראות שתמיד סוג הקטע (הפרשי "3" או "1") מתחלף, כך שאם הוא מתחיל ב- 3^p אז זה הפרשי 1 בתמונה, ואם זה

מתחיל ב- $2\cdot 3^p$, אז זה של 3. המספר הכי קרוב ל-2001 בסדרה זו הוא $2\cdot 3^6=1458$ ולכן (ההפרשים 3):

$$f(2001)=f(1458)+3(2001-1458)=3^7+1629=3816$$

תרגיל 14. <u>(חיפה 2000):</u>

מצאו את כל הפונקציות כדלקמן:

$$\begin{cases} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \\ 3\cdot f(x)-2\cdot f(f(x))=x \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

ע"י בדיקה ניתן להווכח כי קיים הפתרון האלמנטרי

$$\begin{cases} y=f(x)=x, \\ x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

מנתוני הבעיה נובע כי עבור כל מספר שלם x מתקיים

$$\begin{cases} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \\ 2\cdot f(f(x))-2\cdot f(x)=f(x)-x \end{cases}$$

או בצורה הסמלית

$$\frac{f\circ f-f}{f-x}=\frac{1}{2}\qquad(1)$$

נתבונן בביטוי (1) באופן הבא:

$$x_0=z_0,\ x_1=f(z_0),x_2=f(f(z_0))=f\circ f,\quad x_3=f(x_2)=f(f(f(z_0)))=f\circ f\circ f,$$

$$x_4=f\circ f\circ f\circ f\quad ,\ldots,\quad x_{n-1}=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-1},\ \ x_n=\underbrace{f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}$$

כמו כן

$$\begin{cases} \dfrac{f\circ f-f}{f-z_0}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{f\circ f\circ f-f\circ f}{f\circ f-f}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{f\circ f\circ f\circ f-f\circ f\circ f}{f\circ f\circ f-f\circ f}=\dfrac{1}{2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}-\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-1}}{\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-1}-\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-2}}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

נכפיל את כל המשוואות של (2) ונצמצם, כך שנקבל את הביטוי הבא:

$$\begin{cases} f:Z\to Z \\ \dfrac{1}{f-z_0}\cdot\dfrac{\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}-\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-1}}{1}=\dfrac{1}{2^{n-1}} \end{cases} \qquad (3)$$

או

$$\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}-\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ}_{n-1}=\frac{f-z_0}{2^{n-1}} \qquad (4)צ$$

מתנאי הבעיה נובע כי האגף השמאלי של (4) הוא בהכרח שלם, לכל n. נשים לב לאגף הימני של (4). במונה יש לנו ערך קבוע, אך במכנה יש חזקה פונקציה מעריכית הגדלה פי בכל בכל הגדלה של n. לכן האפשרות היחידה שהאגף הימני יהיה שלם היא עבור

$$f(z_0)-z_0=0$$

אזלכ לל $z_0\in\mathbb{Z}$ מתקיים $f(z_0)=z_0$

תשובה:

$$\begin{cases} y=f(x)=x, \\ x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

תרגיל 15.

<u>(IMO 1987 בעיה 4):</u>

הוכח כי לא קיימת פונקציה $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ עבורה $f\left(f\left(n\right)\right)=n+1987$

<u>פתרון:</u>

ראשית נשים לב כי הפונקציה $f\left(n\right)$ היא חד-חד ערכית, הרי אם $f\left(n_1\right)=f\left(n_2\right)$ אז $n_1=f\left(f\left(n_1\right)\right)-1987=f\left(f\left(n_2\right)\right)-1987=n_2$. נגדיר $g\left(n\right)=f\left(f\left(n\right)\right)$. מהנתון ברור כי לכל $p\in\{0,1,2,...,1986\}$ לא קיים n עבורו $g\left(n\right)=p$, כי אז נקבל סתירה לנתון. עם זאת, לכל p שלא שייך לקבוצה הנ"ל, בהכרח ימצא n מתאים. כלומר, ישנם 1987 ערכים אותם $g\left(n\right)$ לא יכולה לקבל. נניח כעת כי $f\left(n\right)$ לא יכולה לקבל את קבוצת הערכים השונים הבאה: $\{v_1,v_2,...,v_k\}$, כלומר k ערכים שונים סה"כ. זה אומר ש- $g\left(n\right)=f\left(f\left(n\right)\right)$ לא יכולה לקבל את קבוצת הערכים הבאה: $V=\{v_1,v_2,...,v_k,f\left(v_1\right),f\left(v_2\right),...,f\left(v_k\right)\}$ - בה גם כל הערכים שונים זה מזה. מובן כי אלה הערכים היחידים ש - $g\left(n\right)$ לא יכולה לקבל, כי הרי אם $a\notin V$ אז קיים n_0 עבורו $f\left(n_0\right)=a$. כפי ש-n_0 עצמו לא שייך לקבוצה $\{v_1,v_2,...,v_k\}$, קיים n_1 עבורו $f\left(n_1\right)=n_0$, לכן $f\left(f\left(n_1\right)\right)=a$. אבל V מכילה מספר זוגי של איברים, בניגוד לכך ש- $g\left(n\right)$ לא יכולה לקבל 1987 ערכים – סתירה.

קשיים בדרכי פתרונם של המשוואות

ואי-השיוויונים פונקציונאליים.

מבוא.

מתוך מרחב הנושאים של מתמטיקה תיכונית קלאסית, קיימים כאלו,

שכמעט תמיד אינם מובנים לרוב התלמידים והמורים כאחד,אפילו למוכנים

ובעלי ניסיון מתוכם.אחד הנושאים הטיפוסיים ותרגילים, שנפתרים בו:"משוואות ואי-השיוויונים פונקציונאליים".

הסיבות של התופעה,קודם כל, בהעדר אלגוריתמים בסיסיים למציאת פתרונות בתחום הנ"ל. לעיתים רחוקות, כדי לעבור את מחסומי תהליך הפתרון, יש צורך בשימוש בגישה קריאטיבית מפותחת. יחד עם זאת, במהלך פתרונם של משוואות ואי-השיוויונים פונקציונאליים חייבים להשתמש במונחים אבסטראקטיים, ויכולת להתעלם מהמקרים הפרטיים. לא סוד, שאבסטראקטיות היא נחלה מתמטית, שמפחידה תלמידים רבים ומאלצת אותם להתרחק ממנה. במקרים רבים זה קורה, מאחר ולא בזמנו, מתמטיקה,, כמדע. בפועל יכולת"...אבסטראקטית מתבטא בזאת,כדי לעלות,אם אתם רוצים לעוף, ולהשקיף על אוסף עובדות, מגובה של ציפורים ובכך לראות את הקשר, שביניהן. ללא אבסטראקציות אי אפשר להשיג זאת. המבט מלמעלה יכול להיות מאוד יפה ומאוד יעיל, והוא מעניק לנו תחושת סיפוק עבור השקעה גדולה, כדי להבין את המושגים האבסטראקטיים. חשוב מאוד להרגיש את התועלת הנ"ל, כמה, שיותר מוקדם, ואז התחושה הזאת תדרבן את התלמיד ואת המורה לחיפוש פתרון, ולא להיכנס לדיכאון" .(62-,56(1999)ICMI, 47.Bull:1998, purxo in -1920-Calderon.Alberto P)

נתבונן במספר דוגמאות.

דוגמה הס' 1

בשנת 1999 באולימפיאדת IMO ברומניה הוצעה לפתרון בעיה מס' 6:

למצוא כל הפונקציות $f: R \to R$ כך,שלכל ממשי $x \in \Re, y \in \Re$ מתקיים:

$$f\left(x - f(y)\right) = f\left(f(y)\right) + x \cdot f(y) + f(x) - 1 .$$

נניח, שאוסף ערכים של הפונקציה f מקיים את התנאי, נקרא לו E.

באופן טבעי נשתמש בהצבה: $x=f(y)$. מהנתון מייד נקבל:
$f(0)=f(x)+x\cdot x+f(x)-1$. לנוחות הדיון, נסמן $c=f(0)$. אז נקבל
$(*):\ \ f(x)=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2}$.

2.נשאלת שאלה (Q): האם ניתן לאומר,שביטוי (*) הוא פתרון של משוואה הנ"ל?

מאוד מתחשק להגיד, "למה לא?". אבל בעקבות השימוש בהצבה $x=f(y)$, בפתרון המצוי, תמיד יהיה ערך $x\in E$, שלא יכול לקבל ערך ממשי כלשהו, ולכן הפתרון המצוי אי אפשר להגדיר כמלא.

בהבנת הטענה האחרונה יש קושי לוגי קשור לפתרון הבעיה. בפועל מצאנו רק פתרון, שהוא "כיווץ" של הפונקציה הנתונה f בתוך אוסף E. פתרון יהיה מלא, אם נצליח להוכיח, ואחר כך להשתמש בעובדה, שאוסף הפרשים מתוך E:
$\{f(x_1)-f(x_2)\}$, $x_1\in\Re, x_2\in\Re$, ימלא כל האוסף $\Re$.

נמשיך בחקירה.

2.1. נתבונן בעוד הצבה טיפוסית אחת $y=0$. נקבל:
$f(x-f(0))=f(f(0))+x\cdot f(0)+f(x)-1$ או $f(x-c)=f(c)+x\cdot c+f(x)-1$.

ז"א, שלכל $x\in\Re$, מתקיים $(2):\ \ f(x-c)-f(x)=x\cdot c+f(c)-1$.

2.2. נחקור עכשיו אפשרות שיוויון לאפס מספר $c=f(0)$. לצורך כך נבדוק $x=y=0$.
מיד נקבל $f(-c)=f(c)+c-1$. אם להניח, ש $c=0$,אז מתוך המשוואה הנתונה, נקבל, ש: $c=1$. סתירה! אז $c\neq 0$.

בביטוי הקודם, (2), נסמן $z=g(x)=x\cdot c+f(c)-1,\ \ x\in\Re$ יכול לקבל כל הערכים.

המסקנה החשובה ביותר, שנובעת מהעובדה הזאת, היא שלכל $z\in\Re$ ממשי, ימצאו $y_1=f(x-c)$, $y_2=f(x)$ מתוך E, כאלו, ש $y_1-y_2=z\in\Re$. ז"א, שכל מספר $z=g(x)\in\Re$ ניתן להציג כהפרש שני מספרים מתוך E.

נשתמש בעובדה זאת. נבחר באופן אקראי מספר z, שעבורו קיים $x=\frac{z-f(c)+1}{c}$,

בהמשך באוסף E ימצאו $\{y_1,y_2\}$ כאלו, ש $y_1=f(x-c)$, $y_2=f(x)$, $y_1-y_2=z\in\Re$.

נשתמש בתנאי ההיסודי של הבעיה: $f(x-f(y))=f(f(y))+x\cdot f(y)+f(x)-1$.

במקרה שלנו, מובן ש, $x=y_1\in \mathrm{E}$, $f(y)=y_2\in \mathrm{E}$, ואז

$$f(z)=f(y_1-y_2)=f(y_2)+f(y_1)\cdot f(y)+f(y_1)-1 \quad (3)$$
$$f(z)=f(y_2)+y_1\cdot y_2+f(y_1)-1,\ \mathrm{z}\in\Re$$

נחקור $(*):\quad f(x)=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2}$. נקבל בשביל $\{z,y_1,y_2\}\subset \mathrm{E}$, $f(y_1)=\frac{c+1}{2}-\frac{y_1^2}{2}$, ובאומן

דומה, $f(y_2)=\frac{c+1}{2}-\frac{y_2^2}{2}$, $f(z)=\frac{c+1}{2}-\frac{z^2}{2}$, אבל מצד שני, לכל ערך של $z\in\Re$,

$$f(z)=f(y_1)+f(y_2)+y_1\cdot y_2-1=\left(\frac{c+1}{2}-\frac{y_1^2}{2}\right)+\left(\frac{c+1}{2}-\frac{y_2^2}{2}\right)+y_1\cdot y_2-1=$$
$$=\frac{2c-y_1^2+2\cdot y_1\cdot y_2-y_2^2}{2}=c-\frac{(y_1-y_2)^2}{2}=c-\frac{(z)^2}{2}$$

$$f(z)=c-\frac{(z)^2}{2} \quad (4).$$

מסקנה סופית: אם פונקציה $f:R\to R$ קיימת, אז חוץ מ-(4) שום דבר לא יתכן.

בהשוואת (4) עם (*) על האוסף E, נקבל: $c-\frac{(z)^2}{2}=f(z)=\frac{c+1}{2}-\frac{z^2}{2}$. ומזה נובע:

$c=1$, ובכן מקבלים הפונקציה האפשרית היחידה: $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ (5).

נחזור לשאלתינו: האם ניתן להסיק עכשיו, שביטוי (5), הוא פתרון של המשוואה הנתונה? ועוד פעם, מתחשק לאומר "למה לא?". אבל, אנחנו השוונו ערך $f(z)$ לכל $z\in\Re$ עם הערך $f(z)$ - על האוסף E , ובכן אנו ביססנו רק עובדה הבאה: אם פונקציה המבוקשת קיימת, אז היא חייבת להיות כזאת: $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

בהבנת המסקנה האחרונה, קיים הקושי הלוגי השני.

ולבסוף:

7.הפעולה האחרונה של הפתרון חייבת להיות בדיקה, שהיא תמיד חלק בלתי נפרד מהפתרון.אכן כל ההעברות שלנו בוצעו על סמך הנחה, שקיימת פונקציה, שהיא פתרון המשוואה הנתונה, וגם עובדה, שבמהלך הפתרון, התקבל ביטוי לפונקציה הנ"ל, מעיד

על כך, שאף ביטוי אחר בשביל $f(x)$ לא יתכן. בדיקה שכזאת, לעיתים מהווה קושי טכני רב, אנו נתגבר עליו באופן הבא:

הראו: $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$, ואז נתבונן במשוואה: $f(x-f(y))=f(f(y))+x\cdot f(y)+f(x)-1$,

$$x-f(y)=x-1+\frac{y^2}{2}\quad(1),\qquad f(x-f(y))=1-0.5\cdot\left(x-1+\frac{y^2}{2}\right)^2\quad(2),$$

$$f(f(y))=1-0.5\cdot\left(1-\frac{y^2}{2}\right)^2\quad(3).$$

נציב הנתונים שהתקבלו במשוואה הנתונה ונקבל:

$$1-0.5\cdot\left(x-1+\frac{y^2}{2}\right)^2=1-0.5\cdot\left(1-\frac{y^2}{2}\right)^2+x\cdot\left(1-\frac{y^2}{2}\right)+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-1$$

$$1-0.5\cdot\left(x-1+\frac{y^2}{2}\right)^2=1-0.5\cdot\left[\left(1-\frac{y^2}{2}\right)^2-2x\cdot\left(1-\frac{y^2}{2}\right)+x^2\right],$$

$$1-0.5\cdot\left(x-1+\frac{y^2}{2}\right)^2=1-0.5\cdot\left(x-1+\frac{y^2}{2}\right)^2$$

ניתן לראות שבעיה נפתרה.

תשובה: $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ (5).

נחזור לשאלה (Q). האם ניתן להסיק שביטוי (5) הוא פתרון של המשוואה?

מתחשק לאומר "למה לא?". אבל אנחנו השוונו ערך $f(z)$ לכל $z\in\Re$ עם ערך של $f(z)$, שהתקבל על האוסף E, ולכן בעצם, אנחנו רק הסברנו את העובדה: אם הפונקציה המבוקשת קיימת, אז הוא חייבת להיות: $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

בהבנת הטענה האחרונה טמון הקושי הלוגי השני.

7. ולבסוף. החלק האחרון של הפתרון חייב להיות מהלך בדיקה, שהיא חלק בלתי נפרד מהפתרון. ובכן, כל המהלכים שלנו נעשו בהנחה, שפונקציה המבוקשת אכן קיימת, וזה שבסוף קיבלנו ביטוי מסוים לפונקציה הנ"ל, מעיד אך ורק, שביטוי אחר

אינו יכול להתקבל. קיום התנאי הנ"ל מהווה לעתים קושי טכני רב, שניתן להתגבר עליו כך:

נראה: $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$, ונתבונן במשוואה $f(x-f(y))=f(f(y))+x\cdot f(y)+f(x)-1$,

$$x-f(y)=x-1+\frac{y^2}{2}\quad(1),\quad f(x-f(y))=1-0.5\cdot\left(x-1+\frac{y^2}{2}\right)^2\quad(2),$$

$$f(f(y))=1-0.5\cdot\left(1-\frac{y^2}{2}\right)^2\quad(3).$$

נציב את הנתוהים, שהתקבלו במשוואה הנתונה, ונקבל:

$$\frac{c+1}{2}-0.5\cdot\left(x-\frac{c+1}{2}+\frac{y^2}{2}\right)^2=\frac{c+1}{2}-0.5\cdot\left(\frac{c+1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)^2+x\cdot\left(\frac{c+1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)+\left(\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)-1$$

משום שתנאיי הזה אמור להיות פסוק אמת לערך מסוים $c=f(0)$, אז, לדוגמה, ל- $x=y=0$, נקבל: $\frac{c+1}{2}-0.5\cdot\left(-\frac{c+1}{2}\right)^2=\frac{c+1}{2}-0.5\cdot\left(\frac{c+1}{2}\right)^2+\left(\frac{c+1}{2}\right)-1$

$0=\left(\frac{c+1}{2}\right)-1$, ומזה נובע,ש- $c=f(0)=1$, ובכך התקבל עידכון $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

בדיקה סופית משחזרת ניסיון של הסעיף הקודם 7.

ובכן התשובה הסופית היא: $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

אנחנו קיבלנו פתרון של הבעיה ועקפנו בפועל את הקשיים הלוגיים של הדרך הראשונה. יחד עם זאת הקשיים הטכניים, בעצם לא השתנו.

נחזור לשאלה (Q): האם עכשיו ביטוי (5), שהתקבל בדרך השנייה, ניתן להגדיר כפתרון המשוואה הנתונה?

לצערינו, לא!הדרך השנייה לא מבטיחה, שלא קיימת פונקציה נוספת, שמקיימת המשוואה הנתונה על החלק אחר של מתום ההגדרה, אבל ביחד עם הטענות ומסקנות קודמות אנו מקבלים פתרון מלא של הבעיה.

נציין גם, שבנושה "משוואות פונקציונאליות" ניתן להשתמש גם בשיטת "ניחוש תשובה", אבל אז חייבים לבדוק אותה ע"י הצבה ולהסביר באופן מלא, שלא קיימים פתרונות אחרים, חוץ מהלא שנוחשץ

קשיים אחרים בפתרונות משוואות ואי שיוויונים פונקציונאליים, נחקור על מספר דוגמאות.

הביעה הבאה הוצעה באולימפיאדה של אוניברסיטה בשם לומונוסוב במוסקבה בשנת 2005.

אי שיוויונים פונקציונאליים

בספרות המודרנית קשה למצוא שיטות או גישות כלליות לפתרונם של אי שיוויונים פונקציונאליים. בהמשך אנו נראה על מספר דוגמאות וננסה להסביר את הקשיים הלוגיים והטכניים בדרך לפתרון.

תרגיל 16.

האם קיימת פונקציה ממשית ל- $f:R\to R$ ממשי, כך שלכל x,y ממשיים, מתקיים:

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)\le y\cdot f\left(x\right)+x \quad (3.P)$$

פתרון.

הקושי הראשון הוא, שבהחלפת המשוואה הפונקציונאלית לאי השוויון, אנו הגבלנו באופן מאוד משמעותי, את היכולות הטכניות שלנו. לדוגמה, אנו לא יכולים להשתמש ב-"חוק הטרנזיטיביות רק לכיוון אחד.לעקוף את הבעיה, אפשרי,למשל ע"י בחירה מתוך... אבל גם כאן צריך להיות מאוד זהיר. נבהיר את האמור מעלה על הדוגמה. הנתון $(3.P)$ מכיל סימן $(\le)$, ז"א ניתן לפרק את הבעיה לאיחוד שתי בעיות: $3.1\cup 3.2$

3.1. האם קיימת פונקציה ממשית ל- $f:R\to R$, כך, שלכל x,y ממשי, מתקיים

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=y\cdot f\left(x\right)+x \quad (P_1)$$

פתרון.

1. נסמן ב- $f(0)=c$.

א. נתבונן באי שוויון הנתון עבור $y=0, x\in\Re$: $\quad f\left(x-f\left(y\right)\right)=y\cdot f\left(x\right)+x$

$$\begin{aligned}&f\left(x-f\left(0\right)\right)=0\cdot f\left(x\right)+x\\&f\left(x-c\right)=x\\(*)\quad&f\left(x\right)=x+c\end{aligned}$$

כלומר, מטענה $f\left(x-f\left(y\right)\right)=y\cdot f\left(x\right)+x \quad (P_1)$ נקבל:

$$\begin{aligned}&(x-f(y))+c=y\cdot(x+c)+x\\&x-y-c+c=y(x+c)+x\\&-y=y(x+c)\end{aligned}$$

סתירה עבור $x>>0, y>>0$.

3.2. האם קיימת פונקציה ממשית $f:R\to R$, כך, שלכל x, y ממשיים, מתקיים:

$f(x-f(y))<y\cdot f(x)+x \quad (P_2)$.

פתרון.

1. נסמן ב- $f(0)=c$.

נתבונן באי שוויון הנתון עבור $y=0, x\in\Re$: $\qquad f(x-f(y))<y\cdot f(x)+x$

$$\begin{aligned}&f(x-f(0))<0\cdot f(x)+x\\&f(x-c)<x\\&(*)\quad f(x)<x+c\end{aligned}$$

עבור $x=0$: $f(0)<c$ או $c<c$, מצב סתירה.

הקורא יכול לנסות למצוא דרכים קצרות יותר לפתרון בעיות 3.1. ו-3.2. רבל מייד נשאלת שאלה: האם ניתן להסיק, שהסבר לאי קיים 3.1 ו-3.2. מספיק לאי קיום $3.P$?

מתחשק עוד פעם לאומר: "למה לא?" אבל זה לא נכון!

העיניין הוא בזה, שפתרון אי שיוויון פונקתיונאלי, הוא בדרך כלל אוסף צירופים מסודרים. ואז, לדוגמה, אם אנו טוענים, שנקודה (x_0, y_0) סותרת מקרה 3.1., אבל לא סותרת מקרה 3.2., אז היא לא סותרת גם לכלל $(3.P)$.

באופן דומה, אם נקודה, (x_1, y_1), לדוגמה, סותרת 3.2., אבל אינה סותרת 3.1., אז (x_1, y_1), לא סותרת גם לכלל $(3.P)$. ובכן, קביעת סתירה ב-(3.1), וב- (3.2) בשתי נקודות שונות, אינה מאפשרת לטעון, שקיימת סתירה גם לטענה $(3.P)$.

הבנת עובדה זאת מהווה קושי לוגי רב לתלמידים. נביא כאן פתרון נכון של הבעיה.

נניח, שפונקציה המבוקשת קיימת.

1. נסמן ב- $f(0)=c$, ונבדוק ל- $y=0, x\in\Re$ אי שיוויון הבא: $f(x-f(y))\le y\cdot f(x)+x$.

2. נקבל:

3.
$$f(x-f(0))\le 0\cdot f(x)+x$$
$$f(x-c)\le x$$
$$(*)\quad f(x)\le x+c$$

מהאי שיוויון (*) מקבלים טענת אמת הבאה:

Y_1: קיימת סידרת מספרים ממשיים $x_1,x_2,\dots,x_i,\dots$ כזאת, ש-$x_i\to(-\infty)$ החל מערך מסוים של i, וגם $f(x_i)<(x_i+c)\to(-\infty)$.

נציין, שמתוך נתוני הבעיה, נובע, שלכל $x=y\in\Re,\ f(y)$

$$(1)\quad \mathrm{c}=f(0)\le \mathrm{y}\cdot f(f(\mathrm{y}))+f(y)$$

$$\mathrm{c}\le \mathrm{y}\cdot f(f(\mathrm{y}))+f(y)\le \mathrm{y}\cdot f(f(\mathrm{y}))+y+c$$
$$0\le y\cdot[f(f(\mathrm{y}))+1]$$

מהטענות הנ"ל נובעת מסקנה 2:

Y_2: לכל $y\in\Re$ מתקיימים:

$$(3)\ \begin{cases}-1\le f(f(y))\\ y>0\end{cases}\quad \text{or}\quad (4)\ \begin{cases}-1\ge f(f(y))\\ y<0\end{cases}$$

4. נסמן $f(1)=a$

א. אם $f(1)=a>0$, אז נבדוק כל הזוגות המסודרים $(x,y)=(1,y)$

$$f(x-f(y))\le y\cdot f(x)+x$$
$$f(1-f(y))\le y\cdot a+1$$

לפי הנחה Y_1 מקבלים, שעבור $y_i\to(-\infty)$ - $f(y_i)\to(-\infty)$.
ואז $m_i=[1-f(y_i)]\to(+\infty)$. מתוך אי השיוויון (3), מקבלים:

$$(3)'\quad \begin{cases}-1\le f(f(m_i))\\ m_i>0\end{cases}$$

ועוד פעם בעזרת הנחה Y_1 ואי שיוויון (3), מקבלים:

$$(5)\quad \begin{cases}-1\le f(f(m_i))<f(m_i)+c=f(1-f(y_i))+c\le y_i\cdot a+1+c\\ m_i=1-f(y_i)>0,\ \mathrm{y_i}\to(-\infty)\end{cases}$$

$$(6)\,-1\le y_i\cdot a+1+f(0),\quad \mathrm{a}>0,\ \mathrm{y_i}\to(\text{-}\infty)$$

סתירה. זה אומר, ש-$f(1)=a=0$ לא מוגדר.

מסקנה: לכל פונקציה ממשית $f:R\to R$ ניתן לשים בהתאמה כאלו x,y ממשיים, שעבורם מתקיים אי שיוויון: $f(x-f(y))>y\cdot f(x)+x$.

כאשר הטכניקה מצילה

לפעמים אי שיוויונים פונקציונאליים, שהם מסובכים ואבסטראקטיים, ניתן לפתור באמצעות שימוש בטכניקה אלגברית מיוחדת, אבל קושי מתבטא בזה, שבעצם אי אפשר בהתחלה,ללא חקירה מוקדמת, לדעת באיזה אמצעי להשתמש.במהלך חקירת נתונים,מופיע הרעיון המוצלח. לדוגמה,

תרגיל 18. (חיפה, אולימפיאדה של פרופ' גרוסמן, שנת 2000).

בתחום של מספרים שלמים מצאו את כל הפונקציות כדלקמן:

$$\begin{cases} f:Z\to Z \\ 3f(x)-2f(f(x))=x \end{cases}$$ **, קבוצת Z מספרים שלמים.**

<u>**פתרון:**</u>

ע"י בדיקה ניתן להוכיח כי קיים הפתרון האלמנטארי $y=f(x)=x,\ \mathrm{x}\in \mathrm{Z}$

נסמן ב- $f(f(x))=f\circ f$. לפי נתון נקבל:

נתבונן בביטוי (1) באופן הבא:

$$x_0=z_0,\ x_1=f(z_0), x_2=f(f(z_0))=f\circ f,\quad x_3=f(x_2)=f(f(f(z_0)))=f\circ f\circ f,$$
$$x_4=f\circ f\circ f\circ f\quad ,...,\quad x_{n-1}=\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{n-1},\ x_n=\underbrace{f\circ f\circ f\circ ...\circ f}_{n}$$

מהנתון, עבור $n\ge 2$, נקבל:

$$\begin{cases} f:Z\to Z \\ 3\cdot x_{n-1}-2\cdot x_n=x_{n-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f:Z\to Z \\ 2\cdot (x_{n-1}-x_n)=x_{n-2}-x_{n-1} \end{cases}$$

כלומר, אם עבור $k\ge 2$ ו- z_0 (מספר שלם) מתקיים $x_{k-1}-x_k=0$, אזי מייד גם נקבל כי $x_{k-2}-x_{k-1}=0$. בחזרה נקבל $f(z)=z$.

נישאר להתבונן ב- $\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{k}-\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{k-1}\neq 0$ עבור $k\ge 2$

כמו כן

$$\begin{cases} \dfrac{f\circ f-f}{f-z_0}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{f\circ f\circ f-f\circ f}{f\circ f-f}=\dfrac{1}{2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-1}-\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-2}}{\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}-\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-1}}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

נכפיל את כל המשוואות של (2) ונצמצם, כך שנקבל את הביטוי הבא:

$$\begin{cases} f:Z\to Z \\ \dfrac{1}{f-z_0}\cdot\dfrac{\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}-\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-1}}{1}=\dfrac{1}{2^n} \end{cases} \qquad (3)$$

$$\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}-\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ}_{n-1}=\frac{f-z_0}{2^n} \qquad (4)$$

מתנאי הבעיה נובע כי האגף השמאלי של (4) הוא בהכרח שלם, לכל n. נשים לב לאגף הימני של (4).

במונה יש לנו ערך קבוע, אך במכנה יש חזקה פונקציה מערכית הגדלה פי בכל הגדלה של n. לכן האפשרות היחידה שהאגף הימני יהיה שלם היא עבור

$$f(z_0)-z_0=0$$

אזלה ל - $z_0\in Z$ מתקיים $f(z_0)=z_0$

תשובה:

$$y=f(x)=x,\ \ \mathrm{x}\in \mathrm{Z}$$

במקום סיכום.

כפי, שצוין קודם, פתרון של כל משוואה או אי שוויון פונקציונאלי,-זה תמיד חקירה מתמטית קטנה, שעשויה להביא את הפותר למיני-גילוי עצמאי. הקושי,שנוצרים בדרך זו, בהחלט משתלמים, בהתחשב במטרה.

מסגרת מוגבלת של הכתבה לא מאפשרת לחקור עוד הרבה דוגמאות מעניינות, אבל גם את אלא, שהבאנו, יאפשרו לקורא להרגיש יותר בטוח בדרך פתרונם של המשוואות ואי השיוויונים פונקציונאליים. תרגילים מתוך התחום הנ"ל, ניתן להשתמש להבחנה של רמת החשיבה הקריאטיבית.