שיטת הברירה ובדיקה

(שיטת ברירת האפשרויות)

<u>שיעור מס' 1.</u>

<u>נושא: תרגילים בשיטת הברירה ובדיקה.</u>

מהות של השיטה נובעת ישירות משמה ונכנסת לסכימת השלבים הבאה (לפעמים חלק מהם מיותרים):

1) להתבונן (מילה במילה, לברור ולבדוק על פי הסדר) בכל הווריאנטים השונים האפשריים אשר מקיימים, לפחות חלקית, את תנאי התרגיל.
2) להוכיח שנבחרו את כל הווריאנטים, ולא יתכנו ווריאנטים נוספים.
3) מאוסף כל הווריאנטים שנבחרו לבחור אלה המקיימים במלואם את כל תנאי התרגיל.
4) לבדוק ולרשום תשובה.

קיימת סכימה מקוצרת של שיטת הברירה ובדיקה. במקרים לא מעטים ברירה ובדיקה של כל הווריאנטים האפשריים לא ניתנת למימוש בגלל מספרם הרב. למשל, בבעיות הקשורות לתורת המשחקים, נגיד במשחק שחמט, מספר מצבים השונים כה גדול, שאפילו מחשב מתוחכם מתקשה להתמודד עימם. במקרה כאשר מספר הווריאנטים השונים מאוד גדול, ניתן לנהוג בדרך הבאה:

1) לברור או לנחש את כל הפתרונות.
2) לבדוק שכל אחד מהם אכן פתרון, כלומר, הוא מקיים במלואם את כל תנאי התרגיל.
3) להוכיח שאין פתרונות אחרים.

כפי שזה נראה מוזר, אך מרבית התלמידים אינם מחבבים במיוחד את שיטת הברירה ובדיקה. היא נראה להם לא יפה, לא מספיק דייקנית ולא רציונלית. אולי פרספקטיבת ברירת כל הווריאנטים האפשריים מרתיעה תלמידים רבים מלהשתמש בשיטה. בעניין זה יש לציין כי ברירת הווריאנטים יש לבצע "בשכל" ולא כפי שיזדמן, ורציונליות מותנת בסכימה בה אנו נעזרים במהלך הברירה. קושי העיקרי בבחירת סכימת הברירה הוא בכך שלא להפסיד אף פתרון, ויחד עם זה שמספר הווריאנטים לא יהיה גדול מדי.
יש להעיר כי שיטת הברירה ובדיקה ושיטת האינדוקציה המתמטית, בה נדון בהמשך, קשורות זו בזו.
נביא כעת מספר דוגמאות הממחישות את שיטת הברירה ובדיקה.

<u>דוגמה 1.1</u>. האם ניתן למקם שני מטבעות זהים בשני ארנקים כך שבאחד מהם כפליים מטבעות מאשר בשני?

פתרון. נתבונן בכל קומבינציות האפשרויות של שני מטבעות בשני ארנקים. נניח כי ארנק אחד גדול ואחד קטן. אם שני ארנקים מונחים בנפרד, אז בכל סידור של מטבעות בהם תנאי התרגיל לא מתקיימים. אך אם ארנק הקטן נמצא בתוך ארנק הגדול ישנן שלוש אפשרויות:

א) שני המטבעות נמצאים בארנק הקטן. במקרה זה בכל ארנק אותו מספר המטבעות.

ב) שני המטבעות נמצאים בארנק הגדול אך לא בארנק הקטן. גם במקרה זה תנאי התרגיל לא מתקיימים.

ג) בארנק הקטן נמצא מטבע אחד בלבד ואילו מטבע השני נמצא בארנק הגדול. במקרה זה כל תנאי התרגיל מתקיימים כי בארנק הגדול כעת שני מטבעות, כלומר, כפליים מאשר בארנק הקטן. לכן תשובה על השאלת התרגיל הנה חיובית.

<u>הערה 1.1</u>. על מנת להשיב בבטחה "כן" על השאלה: "האם זה יתכן?" מספיק להביא דוגמה אחת בלבד הממחישה אפשרות זו (אם, כמובן, לא נשאלת השאלה: "בכמה אופנים שונים ניתן לבצע זה?"). במהלך פתרון התרגיל יש להדגים כיצד ניתן לקבל את "זה" ולהוכיח שהכל נעשה בהתאם מלא עם כל תנאי התרגיל. לעומת זאת, על מנת להוכיח שמשהו לא יתכן, אפשר להסתפק בדוגמאות רק אם מצליחים לברור את כל הווריאנטים האפשריים ולהוכיח שאף אחד מהם לא עולה בקנה אחד עם כל תנאי התרגיל.

<u>דוגמה 1.2</u>. ישנם תשעה מקלות אשר אורכיהם 1 ס"מ, 2 ס"מ, 3 ס"מ, 4 ס"מ, 5 ס"מ, 6 ס"מ, 7 ס"מ, 8 ס"מ ו - 9 ס"מ בהתאמה. מהן צלעות הריבועים אותם ניתן להרכיב ממקלות האלה? בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב את הריבועים? ריבועים נחשבים שונים אם הם מורכבים ממקלות שונים.

<u>פתרון</u>. עוד לפני שניגשים לברירת הווריאנטים ניתן להסיק כי צלע הריבוע לא עולה באורכה על 11 ס"מ, כי היקף הריבוע אינו יכול להיות יותר מסכום אורכי כל המקלות שהוא 45 ס"מ. בנוסף לכך, היות ואורכי צלעות הריבוע שווים ביניהם, אורך צלע הריבוע עולה על 6 ס"מ (חשוב, מדוע?). עתה, כאשר מספר הווריאנטים הצטמצם בצורה ניכרת, ניתן לגשת לשיטת הברירה ובדיקה.
ישנה אפשרות אחת בלבד להרכיב ריבוע בעל צלע 7 ס"מ: 7, 5+2, 4+3, 6+1.

אנו משאירים לקורא לבדוק כי ניתן להרכיב ריבועים בעלי צלעות 8 ס"מ, 10 ס"מ ו- 11 ס"מ, עם זה באופן יחיד. בחמישה אופנים שונים ניתן להרכיב ריבוע בעל צלע 9 ס"מ (הקורא יצליח ללא קושי לפרט את כולם).
לכן ניתן להרכיב ריבועים בעלי צלעות 7 ס"מ, 8 ס"מ, 9 ס"מ, 10 ס"מ

ו - **11** ס"מ, עם זה בתשעה אופנים שונים.

לפעמים מומלץ ליתר המחשה לארגן את כל הווריאנטים האפשריים בטבלה, דבר שמקל על בחירת הווריאנט הדרוש.

<u>דוגמה 1.3</u>. באולימפיאדת בית הספר הוצעו 10 תרגילים. כל תרגיל שתלמיד מצליח לפתור נכון מזכה אותו ב- 5 נקודות, ואילו על כל תרגיל שתלמיד לא הצליח לפתור נכון או לא פותר כלל מורידים 3 נקודות. תלמיד המשתתף באולימפיאדה צבר 34 נקודות. כמה תרגילים הוא הצליח לפתור נכון?

<u>פתרון</u>. כל ווריאנטים האפשריים של מספר נקודות שצבר המשתתף באולימפיאדה ניתן לארגן בטבלה הבאה:

מספר הווריאנט	**מספר תרגילים הפתורים נכון**	**מספר תרגילים הפתורים לא נכון או תרגילים ללא תשובה**	**מספר הנקודות**
1	0	10	$5 \cdot 0 + (-3) \cdot 10 = -30$
2	1	9	$5 \cdot 1 + (-3) \cdot 9 = -22$
3	2	8	$5 \cdot 2 + (-3) \cdot 8 = -14$
4	3	7	$5 \cdot 3 + (-3) \cdot 7 = -6$
5	4	6	$5 \cdot 4 + (-3) \cdot 6 = 2$
6	5	5	$5 \cdot 5 + (-3) \cdot 5 = 10$
7	6	4	$5 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 = 18$
8	7	3	$5 \cdot 7 + (-3) \cdot 3 = 26$
9	8	2	$5 \cdot 8 + (-3) \cdot 2 = 34$
10	9	1	$5 \cdot 9 + (-3) \cdot 1 = 42$
11	10	0	$5 \cdot 10 + (-3) \cdot 0 = 50$

מהטבלה רואים מיד כי תלמיד המשתתף באולימפיאדה יצבור 34 נקודות אך ורק אם יצליח לפתור נכון 8 תרגילים בלבד.

תשובה: 8 תרגילים.

<u>הערה 1.2</u>. שיטת ברירת כל האפשרויות (אשר קוראים לה גם בשם: "שיטת האינדוקציה השלמה"), בה השתמשנו בתרגיל הקודם, מספקת תשובות לשאלות רבות נוספות, למשל, ניתן לטעון כי לתרגיל אין פתרון אם מספר הנקודות שצבר המשתתף באולימפיאדה שונה מהמספרים הבאים: -30, -22, -14, -6, 2, 10, 18, 26, 34, 42, 50, על מנת לצבור 40 נקודות לפחות על תלמיד לפתור נכון לא פחות מ- 9 תרגילים וכו'.

<u>הערה 1.3</u>. לתרגיל ישנו פתרון אלגברי. אמנם, אם נסמן ב- X מספר התרגילים שתלמיד המשתתף באולימפיאדה הצליח לפתור נכון ואילו ב- Y מספר הנקודות שצבר, אז מתקיים:

$$y = 5 \cdot x + (-3) \cdot (10 - x) = 8x - 30$$

ערך של X, אשר עבורו Y = 34, הנו פתרון המשוואה:

$$34 = 8x - 30 \Leftrightarrow 8x = 64 \Leftrightarrow x = 8$$

התקבל פתרון אשר, ללא ספק, פשוט יותר וקצר יותר. אך האם הוא מוחשי יותר? תשובה לשאלה זו תינתן רק על ידי הקורא.

<u>דוגמה 1.4</u>. במשפחה ארבעה ילדים בני 5, 8, 13 ו-15 שמות התלמידים: חנה, ברוך, אהובה וגלית. בן כמה כל ילד, אם ילדה אחת הולכת לגן, חנה מבוגרת מברוך, ואילו סכום הגילאים של חנה ואהובה מתחלק ללא שארית ב- 3.

<u>פתרון</u>. נארגן בטבלה את כל הווריאנטים של סכומי גילאי הילדים בזוגות:

מספר הווריאנט	1	2	3	4	5	6
סכום הגילאים	5+8=13	5+13=18	5+15=20	8+13=21	8+15= 23	13+15=28

היות ורק הסכומים השני והרביעי מתחלקים ללא שארית ב- 3 גליהן של חנה ואהובה יכולים לקבל בהתאמה את הערכים הבאים: 5 ו- 13, 13 ו- 5, 8 ו- 13 13 ו- 8. נרשום את התוצאות בטבלה הבאה:

גיל של חנה	5	13	8	13
גיל של אהובה	13	5	13	8

כעת, בהסתמכות על טבלה השניה, ניתן לגשת לשיטת הברירה ובדיקה. היות וחנה מבוגרת מברוך, היא לא הצעירה במשפחה, כלומר, היא לא בת 5 . אם חנה בת 8, אז ברוך בן 5, כי הוא צעיר ממנו. אך במקרה זה ברוך הולך לגן בסתירה לכך שילדה הולכת לגן. לכן ישנה אפשרות יחידה: חנה בת 13, ברוך בן 8 (כי הוא צעיר מחנה, אך לא הצעיר במשפחה), אהובה בת 5 (כי זאת האפשרות היחידה שנשארת בטבלה השניה), ואז גלית בת 15.

תשובה: אהובה בת 5, ברוך בן 8, חנה בת 13 , גלית בת 15 .

<u>דוגמה 1.5</u>. מצא כל מספרים טבעיים תלת ספרתיים בעלי שתי תכונות הבאות:

א) ספרתו הראשונה קטנה פי 3 מספרתו האחרונה.

ב) סכום של המספר ומספר המתקבל ממנו על ידי החלפת סדר הספרות השניה והשלישית מתחלק ללא שארית ב- 8 .

<u>פתרון</u>. אפשר, כמובן, לגשת ישירות לשיטת הברירה ובדיקה, כלומר, להתבונן בכל 900 מספרים טבעיים תלת ספרתיים מ- 100 עד 999 ולבדוק אחד - אחד את התאמתם לתנאי התרגיל. דרך זו, ללא ספק, תוביל אותנו לפתרון, אך תגזול מאתנו זמן רב. לכן ננסה לצמצם בכל שאפשר את מספר הווריאנטים.

אם N מספר תלת-ספרתי כלשהו בו a ספרת המאות, b ספרת העשרות ואילו c ספרת האחדות. אז a, b, ו- c מספרים שלמים המקיימים: $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $0 \le c \le 9$ ומתקיים: $N = 100a + 10b + c$.

על פי תנאי א) של התרגיל $c = 3a$, מכאן נובע כי a יכול לקבל רק שלושה ערכים הבאים: 1, 2 ו- 3, c יכול לקבל בהתאמה את הערכים הבאים: 3, 6 ו- 9 ואילו $0 \le b \le 9$.

נרשום כעת בטבלה את כל הצורות האפשריות של המספר $N = 100a + 10b + c$.

מספר הווריאנט	**a**	**c**	**N**	**b**
1	1	3	100 + 10b +3 = 103 + 10b	0 ≤ b ≤ 9
2	2	6	200 + 10 b + 6 = 206 + 10b	0 ≤ b ≤ 9
3	3	9	300 + 10b + 9 = 309 + 10b	0 ≤ b ≤ 9

אם נסמן ב- M מספר המתקבל מהמספר N על ידי החלפת ספרותיו השניה והשלישית, אז מתקיים: $M = 100a + 10c + b$. היות וצורת המספר N ידועה לנו, נרשום בטבלה את כל הצורות האפשריות של המספר $(M + N)$.

מספר הווריאנט	**a**	**c**	**N**	**M**	**N + M**	**b**
1	1	3	103 + 10b	100 + 10·3 + b	233 + 11b	0 ≤ b ≤ 9
2	2	6	206 + 10b	206 + 10·6 + b	466 + 11b	0 ≤ b ≤ 9
3	3	9	309 + 10b	309 + 10·9 + b	699 + 11b	0 ≤ b ≤ 9

על פי תנאי ב) של התרגיל, המספר $(M + N)$ מתחלק ללא שארית ב- 8. נרשום כל אחד ממספרים האלה (שהם תלויים ב- b כאשר $0 \le b \le 9$) בצורה הנוחה לבחירת הערכים הדרושים של b.

1) כאשר $a = 1$, $c = 3$ מתקיים:

$N+M = 233+11b = 232+8b+(3b+1)$

היות ו- $(232+8b)$ כפולה של 8 לכל b שלם, $(N+M)$ מתחלק ב – 8 אך ורק כאשר $(3b+1)$ מתחלק ב – 8. כעת לא קשה לברור את כל הערכים האפשריים של b. נארגן זה בטבלה:

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3b + 1	1	4	7	10	13	16	19	22	22	25

מכאן מיד רואים שרק עבור $b=5$ הביטוי $(3b+1)$ מקבל ערך 16, שהוא כפולה של 8. במקרה זה $N=153$. באופן דומה נתבונן בשני המקרים האחרים.

2) כאשר $a=2$, $c=6$ מתקיים: $N+M = 466+11b = 464+8b+(3b+2)$

היות ו - $(464+8b)$ כפולה של 8 לכל b שלם, $(N+M)$ מתחלק ב- 8 אך ורק כאשר $(3b+2)$ מתחלק ב- 8 .כאשר $0 \le b \le 9$. נארגן את כל הערכים האפשריים של b בטבלה:

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3b + 2	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29

רק עבור $b=2$ הביטוי $(3b+2)$ מקבל ערך 8, שהוא כפולה של 8.

במקרה זה $N=226$.

3) כאשר $a=3$, $c=9$ מתקיים: $N+M = 699+11b = 696+8b+(3b+3)$

היות ו - $(696+8b)$ כפולה של 8 לכל b שלם, $(N+M)$ מתחלק ב– 8 אך ורק כאשר $(3b+2)$ מתחלק ב - 8 כאשר $0 \le b \le 9$. שוב נרשום את כל התוצאות האפשריות בטבלה:

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3b + 3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

גם הפעם ישנו ערך יחיד של b, והוא $b=7$ אשר עבורו הביטוי $(3b+3)$ מתחלק ב- 8 במקרה זה $N=379$, ובכך ישנם שלושה מספרים המקיימים את תנאי התרגיל.

תשובה: 153, 226, 379.

<u>דוגמה 1.6</u>. פתור במספרים טבעיים את המשוואה: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

<u>פתרון</u>. נזכיר תחילה שמספרים טבעיים הנם איברי הקבוצה $N=\{1,2,3,...\}$. דרישה לפתור משוואה במספרים טבעיים, פירושו של דבר, למצוא x,y,z אשר מקיימים:

$x\in N, y\in N, z\in N$.

1) נעיר קודם שאם שלישית המספרים הטבעיים (k, m, n) מהווה פתרון המשוואה

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,$$

אז כל שלישיה אחרת, המתקבלת ממנה על ידי חילוף סדר המספרים, גם מהווה פתרון המשוואה.

2) בכל שלישית המספרים שהיא פתרון המשוואה אין אף מספר 1, כי $\frac{1}{1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1$

(לכל y ו - z טבעיים) ואין שני מספרים השווים ל- 2 כל אחד, כי $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{z}>1$

(לכל z טבעי).

3) למשוואה ישנו פתרון וודאי כאשר כל שלושה המספרים שווים ביניהם וכל אחד מהם 3, (כלומר, $x=y=z=3$). אם שני מספרי השלישייה שווים ביניהם אך שונים ממספר השלישי (במקרה זה משוואה הנה בעלת צורה הבאה:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$$

אז כאשר $y>4$ נקבל: $1<x<2$, דבר שלא יתכן. לכן $x=2$, $y=z=4$ וקיימים שני פתרונות נוספים המתקבלים ממנו על ידי חילוף סדר המספרים.

4) כעת ניתן להניח שכל מספרי השלישייה המהווה פתרון למשוואה שונים זה מזה.

היות ו- $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ ואילו $\frac{5}{6}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}<1$, הגדול בין מספרי השלישייה

לא עולה על 6. נסו להוכיח טענה זו בדרך אחרת.

5) כעת, כאשר מספר הווריאנטים שנשארו אינו גדול, ניתן להפעיל את שיטת הברירה

ובדיקה. אם $x=6$ מגיעים למשוואה: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}$ אשר מתקיימת אך ורק

כאשר $z=3, y=2$ או $z=2, y=3$.

6) אם $x=5$ מגיעים למשוואה: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$ אשר לא מתקיימת לשום ערכים

טבעיים של הנעלמים y ו - z. אנו משאירים לקורא לבדוק טענה זו.

7) אם $x=4$ מגיעים למשוואה: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$ אשר גם לא מתקיימת לשום ערכים

טבעיים של הנעלמים y ו - z. גם טענה זו הקורא יצליח לבדוק בעצמו.

אם נתחשב בהערה של סעיף 1) של הפתרון, נוכל לרשום תשובה סופית.

תשובה:

$$(3,2,6),(2,6,3),(2,3,6),(4,4,2),(4,2,4),(2,4,4),(3,3,3),(6,3,2),(6,2,3),(3,6,2)$$

__דוגמה 1.7__. בכל אחד משני מגרשי חניה 28 מכוניות, עם זה ביניהן סה"כ 11 מכוניות "פיאט" ושאר מכוניות "פורד". במגרש הראשון יחס בין מספר ה"פיאטים" ומספר ה"פורדים" קטן פי 2 מזה שבמגרש השני. כמה "פורדים" בכל מגרש חניה?

הוראות לתלמיד:

1) נמק את הטענה הבאה: מספר ה"פורדים" במגרש הראשון גדול מזה שבמגרש השני.

2) הוכח שבמגרש הראשון לא פחות מ - 6 "פיאטים".

3) הוכח בשיטת הברירה ובדיקה שבמגרש הראשון 7 "פיאטים" בלבד.

4) הוכח שבמגרש השני 24 "פורדים" בלבד.

ניתן לפתור את התרגיל בדרך אחרת. יהיו M_1 ו- M_2 מספר ה"פורדים" במגרשי חניה הראשון והשני בהתאמה, ואילו N_1 ו- N_2 מספר ה"פיאטים" במגרשי חניה הראשון והשני בהתאמה.

ע"ס תנאי התרגיל ניתן להרכיב את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} 2\cdot\frac{M_1}{N_1}=\frac{M_2}{N_2}; \qquad M_1+N_1=28 \\ \\ M_2+N_2=28; \quad N_1+N_2=11 \end{cases}$$

מכאן נובע:

$$\frac{2}{N_1}=\frac{1}{28}+\frac{1}{11-N_1}$$

משוואה שהתקבלה ניתן לפתור בשיטת הברירה ובדיקה או בדרך אחרת כלשהי. פתרון המשוואה המקיים את כל תנאי התרגיל הנו $N_1=7$, לכן $N_2=4$, $M_1=21$, $M_2=24$.

אנו משאירים לקורא לנמק משמעות כל משוואה במערכת ולרשום במחברת פתרון מלא ומפורט של התרגיל.

כעת נתבונן במספר תרגילים ממבחני מתכונת ומבחני בגרות ברמה של 5 יח״ל.

<u>דוגמה 1.8</u>. סכום ספרותיו של מספר תלת ספרתי נתון הנו 8. אם נמחק את ספרת המאות במספר הנ״ל נקבל מספר דו ספרתי הקטן פי 5 מהמספר הנתון. אם נמחק את ספרת העשרות במספר הדו ספרתי, נקבל מספר הקטן ב - 120 מהמספר התלת ספרתי הנתון. מצא את המספר הנתון.

<u>פתרון</u>. לאחר מחיקת ספרת המאות וספרת העשרות, נשארה במספר תלת ספרתי רק ספרת האחדות, וידוע שהיא קטנה ב - 120 מהמספר התלת ספרתי הנתון. מכאן ברור כי המספר התלת ספרתי עצמו הנו בעל הצורה: 12*.

(* מסמנת את ספרת האחדות החסרה).

מנתוני התרגיל נובע כי המספר הנתון מתחלק ב - 5. זאת אומרת, קיימות שתי אפשרויות בלבד: 120 או 125. אך רק באחד משני המספרים סכום הספרות שווה ל - 8, לכן המספר הנו 125. (למעשה תנאי ההתחלקות ב - 5 מיותר, אך בפתרון הבעיה באמצעות מערכת משוואות בשני נעלמים התנאי הנו הכרחי).

תשובה: 125.

<u>דוגמה 1.9</u> . תלמיד כפל זה בזה שני מספרים חיוביים. הוא טעה בחישוביו וקיבל מכפלה שגויה, בה ספרת העשרות גדולה ב - 2 מספרת העשרות הנכונה ואילו ספרת המאות קטנה ב - 1 מספרת המאות הנכונה. לשם בדיקה חילק את המכפלה השגויה באחד המספרים וקיבל מנה 15 ושארית 12. כאשר חילק את המכפלה השגויה במספר השני קיבל מנה 18 ושארית 15. מצא את שני

המספרים.

<u>פתרון</u>. נסמן אחד מהמספרים ב - x והשני ב - y. מכאן xy - מכפלתם האמיתית ואילו $(xy-80)$ מכפלתם השגויה (הסבר, מדוע). לגבי הנעלמים x ו - y ניתן להרכיב מערכת הבאה :

$$\begin{cases} \dfrac{xy-80}{x}=15+\dfrac{12}{x} \\ \dfrac{xy-80}{y}=18+\dfrac{15}{y} \end{cases}$$

אם נעבור למערכת שקולה :

$$\begin{cases} y-\dfrac{80}{x}=15+\dfrac{12}{x} \\ x-\dfrac{80}{y}=18+\dfrac{15}{y} \end{cases}$$

נקבל כי : $y<x$, $17\le y\le 19$, ו - $19\le x\le 24$, $x\ne 20$ (הסבר מדוע).

כעת, למעשה, יש לבדוק 14 זוגות מספרים בלבד :

(24, 19), (24, 18), (24, 17), (23, 19), (23, 18), (23, 17), (22, 19),

(22, 18), (22, 17), (21, 19), (21, 18), (21, 17), (19, 18), (19, 17).

זוג היחיד המקיים את כל לתנאי התרגיל הנו : (23, 19).

תשובה: 23 ו - 19.

<u>דוגמא 1.10</u>.נתונים שני מספרים דו ספרתיים אשר מהם גדול מהשני ב- 5. יוצרים מהם שני מספרים באופן הבא :

(1) כותבים תחילה את המספר הדו ספרתי הקטן מבין השניים, מימין לספרת יחידותיו רושמים את הספרה 2 ומימינה את המספר הדו ספרתי הגדול מבין השניים.

(2) רושמים תחילה את המספר הדו ספרתי הגדול מבין השניים, מימין לספרת יחידותיו רושמים את המספר הדו ספרתי הקטן מבין השניים ואת המספר שהתקבל כופלים פי 5.

סכום שני המספרים שהתקבלו הנו 17765. מצא את שני המספרים הנתונים.

<u>פתרון</u>. נסמן ב- $\overline{x}$ את המספר הדו ספרתי הקטן מבין השניים ו- $\overline{x+5}$ המספר הדו ספרתי הגדול מבין השניים.

מ- (1) נקבל המספר : $\overline{\overline{x}2\overline{x+5}}$, שהוא בעל חמש ספרות.

מ- (2) נקבל המספר : $\overline{\overline{x}\,\overline{x+5}}$, שהוא בעל ארבע ספרות.

ומכאן מגיעים למשוואה הבאה : $\overline{\overline{x}2\overline{x+5}}+\overline{\overline{x}\,\overline{x+5}}\cdot 5=17766$

ברור כי ספרה הראשונה במספר הדו ספרתי הראשון הנה 1 (הסבר, מדוע).
זאת אומרת שיש לבדוק רק 10 מספרים מ- 10 עד 19 כולל. אך אם נשים לב
לכך שהמחבר השני $\overline{\overline{x}x+5}\cdot 5$ מסתיים בספרה 0 או 5 והסכום מסתיים בספרה 5
ברור כי גם המחבר הראשון מסתיים בספרה 0 או 5. את התנאי הזה מתקיים שני
מספרים בלבד : 10 ו- 15. בדיקה מראה כי 10 הנו מספר הראשון ולכן 15 הנו
מספר השני.

תשובה: 10 ו- 15.

<u>דוגמא 1.11.</u> נסמן $S(n)$ סכום ספרותיו של מספר טבעי n. מצא את כל המספרים הטבעיים n אשר מקיימים : $S(n)\cdot(S(n)+1)=n$.

<u>פתרון:</u>

1. ברור כי לא קיימים מספרים חד ספרתיים אשר מקיימים את התנאי : $n\cdot(n+1)=n$.
2. אם המספר המבוקש הוא דו ספרתי $n=\overline{ab}$ אז נקבל :

$$S(n)\cdot(S(n)+1)=n \Leftrightarrow (a+b)\cdot(a+b+1)=10a+b;$$
$$(a+b)^2+a+b=10a+b; \quad (a+b)^2=9a \Leftrightarrow$$
$$a_1=1,\ b_1=2,\ \underline{\underline{n_1=12}}; \quad a_2=9,\ b_2=0,\ \underline{\underline{n_2=90}},\ a_3=4,\ b_3=2,\ \underline{\underline{n_3=42}}$$

3. אם המספר המבוקש הוא תלת ספרתי $n=\overline{abc}$ אז נקבל :

$$S(n)\cdot(S(n)+1)=n \Leftrightarrow (a+b+c)\cdot(a+b+c+1)=100a+10b+c;$$
$$(a+b+c)^2+a+b+c=100a+10b+c; \quad (a+b+c)^2=9\cdot(11a+b)$$

ומכאן : $$\begin{cases}11a+b=m^2\\ a+b+c=3m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=m^2-11a\\ c=3m+10a-m^2\end{cases}$$

באמצעות שיטת ברירת האפשרויות, נקבל :

m	a	$b=m^2-11a$	$c=10a-(m-3)m\le 9$	$n=\overline{abc}$
4	1	5	6	$\underline{\underline{n_3=156}}$
5	2	3	$20-10=10$	-
6	3	3	$30-18=12$	-
7	4	5	$40-28=12$	-
8	5	9	$50-40=10$	-
9	7	4	$70-54=16$	-
10	9	1	$90-70=20$	-

4. אם המספר המבוקש הוא בן ארבע ספרות $n=\overline{abcx}$ אז נקבל:

$$10^3\le \overline{abcx}=S(n)\cdot(S(n+1)+1)=(a+b+c+x)\cdot(a+b+c+x+1)\le$$
$$\le 36\cdot 37=1332<2000$$

לכן הספרה הראשונה חייבת להיות: $a=1$. במקרה זה נקבל:

$$10^3\le \overline{1bcx}=S(n)\cdot(S(n+1)+1)=(1+b+c+x)\cdot(1+b+c+x+1)\le$$
$$\le 28\cdot 29=812<1000$$

סתירה זו מראה שלא קיים מספר בן ארבע ספרות אשר מקיים את התנאי.

5. נוכיח באמצעות אינדוקציה מתמטית שעבור $k\ge 5$ מתקיים: $9k(9k+1)<10^{k-1}$

א) עבור $k=5$, נקבל: $9k(9k+1)=9\cdot 5\cdot 46=2070<10^{5-1}=10000$. ז"א שהטענה נכונה עבור $k=5$.

ב) נניח שעבור k מסוים מתקיים: $9k(9k+1)<10^{k-1}$.

ג) נוכיח שהטענה נכונה עבור $k+1$

$$9(k+1)(9(k+1)+1)<10^k$$

הוכחה:

$$9(k+1)(9(k+1)+1)=9k\cdot(9k+1)\cdot\frac{9(k+1)(9(k+1)+1)}{9k\cdot(9k+1)}<10^{k-1}\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\frac{(9(k+1)+1)}{9k+1}=$$
$$=10^{k-1}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{9k+1}\right)<10^{k-1}\cdot 4<10^k$$

סוף ההוכחה.

לכן אם המספר הוא בן k ספרות ו - $k\ge 5$ מתקיים:

$$10^{k-1}\le n=\overline{a_1a_2a_3a_4...a_k}=S(n)\cdot(S(n+1)+1)\le 9k(9k+1)<10^{k-1}.$$

קיבלנו סתירה. מכאן לא קיימים מספרים בני k ספרות, $k\ge 5$ אשר מקיימים את התנאי.

תשובה סופית: $12,\ 42,\ 90,\ 156$.

תרגילים לעבודה עצמית

1) צבי הגיע יחד עם אביו למטווח. הסכם ביניהם הוא כזה: צבי יורה מעבר למטרה 5 פעמים, וכל פגיעה במטרה מזכה אותו בשתי יריות נוספות (כלומר, אביו קונה לו שני כדורים נוספים). צבי ביצע סה"כ 17 יריות. כמה פגיעות הוא השיג?

2) במחסן 5 מכונות השוקלות 1500 ק"ג, 1020 ק"ג, 800 ק"ג, 750 ק"ג, ו- 600 ק"ג בהתאמה. משאית בעלת כושר נשיאה 3000 ק"ג הגיעה על מנת להעביר אותן לאגף בבית החרושת. איזה מכונות יש להעמיס על המשאית על מנת לא לגרום להעמסת יתר של המשאית ויחד עם זה לקחת משקל מקסימלי?

3) האם קיימים שני מספרים שלמים אשר כל אחד מהם גדול ב- 1. מריבוע של השני?

4) במספר 3728954106 מחוק שלוש ספרות כך שספרות הנשארות והרשומות באותו סדר מהווים מספר שבע ספרתי מקסימלי.

5) נרכשו כמה אלבומים זהים וכמה גלויות זהות. על כל אלבומים שולם 10 דולר ו- 56 סנט ואילו על כל גלויות שולם 56 סנט. ידוע כי מספר האלבומים שנרכשו גדול ב- 6 מזה של הגלויות ומחירו של אלבום עולה מזה של גלויה ביותר מדולר אחד. מהו מספר האלבומים ומהו מספר הגלויות שנרכשו?

6) 12 אנשים נושאים 12 ככרות לחם, עם זה כל גבר נושא 2 ככרות, כל אישה חצי ככר ואילו כל ילד רבע ככר. מהו מספר הגברים, הנשים והילדים?

7) הכנס במקום הכוכבים ספרות (לא בהכרח זהות) כך שמספר שבע ספרתי $30*0*03$ יתחלק ב- 13.

8) במהלך 5 שנות לימוד השתתף סטודנט ב- 31 מבחנים, עם זה בכל שנה החל מהשניה הוא נבחן יותר פעמים מאשר בשנה שקדמה לה. ידוע כי מספר המבחנים בהם השתתף הסטודנט בשנה החמישית גדול פי 3 ממספר המבחנים בהם השתתף בשנה הראשונה. בכמה מבחנים השתתף הסטודנט בשנה הרביעית של לימודיו?

9) בהרכבת 40 תרגילים השתתפו 30 סטודנטים המיצגים 5 מגמות. נציגי אותה מגמה הרכיבו אותו מספר התרגילים, ואילו נציגי מגמות שונות הרכיבו מספר שונה של תרגילים. מהו מספר הסטודנטים שהרכיבו תרגיל אחד בלבד?

10) פתור במספרים טבעיים את המשוואה: $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$

11) מצא כל מספרים תלת ספרתיים אשר גדולים פי 19 מסכום ספרותיהם?

12) מצא שלושה מספרים שלמים כך שריבעו כל אחד מהם גדול ב- 3 מסכום שני האחרים.

13) יש להכניס לשלוש שקיות ניילון 12 אגוזים כך שבכל אחת מהשקיות יהיה מספר אי-זוגי של אגוזים. מצא בכמה אופנים ניתן לעשות זאת.(השאלה ניתנה באולימפיאדה זוטא לכיתה ז' ,מכון וייצמן למדע, מרץ 1999).

14) תלמיד כפל זה בזה שני מספרים טבעיים. הוא טעה בחישוביו וקיבל מכפלה שגויה, בה ספרת העשרות גדולה ב- 1 מספרת העשרות הנכונה, ואילו ספרת המאות קטנה ב- 1 מספרת המאות הנכונה. לשם בדיקת החישוב חילק התלמיד את המכפלה

השגויה באחד המספרים המקוריים וקיבל מנה 13 ושארית 10. כאשר חילק את המכפלה השגויה במספר השני, קיבל מנה 19 ושארית 12. מהי תוצאת המכפלה הנכונה.

(השאלה ניתנה במבחן בגרות ברמה של 5 יח״ל ביוני 1985).

15) נתונים שני מספרים דו ספרתיים אשר אחד מהם גדול מהשני ב- 11. משני מספרים דו ספרתיים אלה יוצרים שני מספרים בעלי חמש ספרות בדרכים הבאות:

א) רושמים את המספר הדו ספרתי הגדול מבין שני המספרים הנתונים, לאחר ספרת יחידותיו רושמים את הספרה אפס ואחריה – את המספר הדו ספרתי, הקטן מבין שני המספרים הנתונים. מקבלים מספר בעל חמש ספרות.

ב) רושמים תחילה את המספר הקטן מבין שני המספרים הנתונים, לאחר ספרת יחידותיו רושמים את המספר הדו ספרתי הגדול מביניהם ואת המספר בעל ארבע ספרות שקיבלנו מכפילים ב- 10. מקבלים שוב מספר בעל חמש ספרות.

סכום שני המספרים בעלי חמש ספרות שקיבלנו ב- א׳ וב- ב׳ הנו 31220.

מצא את המספרים הנתונים.

(השאלה ניתנה במבחן בגרות ברמה של 5 יח״ל ביולי 1971).