התחרות הבינלאומית במתמטיקה לסטודנטים

מיון לנבחרת ישראל – שלב א'

6/1/2012

משך הבחינה: 4 שעות

1. חשב את האינטגרל (הלא מסויים)

$$\int \frac{x^2 dx}{(\cos x + x \sin x)^2}.$$

2. נתון פולינום P ממעלה 5772, עם מקדמים שלמים חיוביים. הוכח שקיים n שלם, כך שההצגה העשרונית של המספר $P(n)$ כוללת 2011 ספרות 7 רצופות.

3. חשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} + \cdots - \frac{1}{4n} \right) \right).$$

4. לכל m נקודות $P_1, \ldots, P_m$ במרחב $\mathbb{R}^n$, אפשר ליצור מטריצה $m \times m$, $A = (a_{ij})$, שרכיביה הם $a_{ij} = |P_i P_j|^2$. עבור n נתון, מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של m שעבורו יש מטריצה כזו שהיא הפיכה?

5. סדרת אותיות נקראת "חופשית מריבועים" אם אין בה אף רצף החוזר על עצמו פעמיים רצופות. האם אפשר להרכיב מלה חופשית מריבועים מ־22 אותיות האלף־בית העברי, כך שאם נוסיף אות כלשהי משמאל, הרצף יפסיק להיות חופשי מריבועים? אם כן, מהו האורך המינימלי של סדרה כזו?

בהצלחה!