אולימפיאדת סטודנטים-מבחן מיון.

תשס"ח (2007-2008) – שלב ראשון.

פתרונות

1. תהא $\mathbf{X}$ מטריצה 2×2 מעל הרציונאליים,
אשר מקיימת $\mathbf{X}^2 = 2\mathbf{I}$, כאשר $\mathbf{I}$ זו מטריצת יחידה.
א. חשב את trace $\mathbf{X}$
ב. חשב את det $\mathbf{X}$

קל לראות שמטריצות כאלה קיימות, למשל $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. לכן קיימת לפחות תשובה אחת.

פתרון ראשון.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(a+d)b = (a+d)c = 0$$

$$a^2 + bc = bc + d^2 = 2$$

אם $b = 0$ אז $a^2 = 2$, סתירה כי a רציונלי.
לכן $b \neq 0$ אבל $(a+d)b = 0$ כלומר $\operatorname{trace} X = a + d = 0$.
נציב $a = -d$ במשוואה $a^2 + bc = 2$ ונקבל $-ad + bc = 2$ כלומר

$$\det X = ad - bc = -2$$

פתרון שני. ערכים עצמיים של מטריצה מקיימים $x^2 - 2 = 0$ כלומר $\pm\sqrt{2}$.
סכום של ערכים עצמיים זה trace והוא רציונלי, לכן ערך עצמי אחד $-\sqrt{2}$ והשני $\sqrt{2}$.
(אילו $-\sqrt{2}$ או $\sqrt{2}$ היה מופיע פעמיים, סכומם היה אי-רציונלי).
לכן trace = סכום ערכים עצמיים = 0,
det = מכפלת ערכים עצמיים = -2.

2. תהא f פונקציה על הממשיים בעלת נגזרת רציפה מכל סדר אשר מקיימת $|f(x)| < A$ לכל x. הוכח כי f "(x) (נגזרת שנייה של f) מתאפסת בנקודה מסוימת.

פתרון ראשון. נניח אחרת - f "(x) לא מתאפסת באף נקודה.
אפשר להכפיל את f ב- 1- בלי לפגוע בתנאים, וזה יחליף סימן גם לנגזרת שנייה.
לכן אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות כי f "(x) > 0 לכל x.
לכן f'(x) עולה ממש.
אם פונקציה f'(x) מקבלת ערך חיובי K בנקודה מסוימת אז החל מהנקודה הזאת היא גדולה מ-K לכן f(x) שהיא אינטגרל של f'(x) עולה יותר מהר מאשר פונקציה ליניארית עולה

Kx+L לכן היא לא חסומה, סתירה. באופן דומה, אם f'(x) מקבלת ערך שלילי בנקודה מסוימת, אז לפני הנקודה הזאת f(x) יורדת בקצב יותר מהר לכן גם במקרה זה היא יותר גדולה מפונקציה ליניארית שמקבלת ערכים גדולים מאוד עבור x ששואף למינוס אינסוף.
פתרון שני. אפשר לנסח את אותו הדבר בלשון גיאומטרי.
כמו קודם, אפשר להניח כי $0 < f''(x)$ לכל x.
זאת אומרת שפונקציה f קמורה. לכן הגרף שלה נמצא מעל כל משיק. אם פונקציה נמצאת מעל פונקציה ליניארית וחסומה, אז הפונקציה ליניארית בעלת שיפוע 0.
לכן $f'(x) = 0$ לכל x. כלומר $f'' = 0$, סתירה.

פתרון שלישי. כמו קודם, אפשר להניח כי $0 < f''(x)$ לכל x.
נרשום טור טיילור עם שארית בצורת לגרנז'.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_1)(x-x_0)^2$$

כאשר x_1 נמצאת בין x לבין x_0. אבל בכל מקרה $f''(x_1)(x-x_0)^2$ חיובי, לכן

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

אם $f'(x_0)$ אינו מתאפס, אז אפשר לבחור x כך שהאגף הימני של האי-שוויון (ולכן גם השמאלי) יהיה גדול כרצוננו.
אם לא, ואי-אפשר לבחור x_0 כזה כך ש-$f'(x_0)$ אינו מתאפס אז 'f הוא 0 זהותי וגם " f. סתירה.

3. בוחרים N נקודות מקריות באופן בלתי תלוי ובהתפלגות אחידה בתוך הריבוע $[0,1]\times[0,1]$.
נקודה (x,y) שנבחרה נקראת נקודה מיוחדת אם לא נבחרו נקודות אחרות במלבן $[0,x]\times[0,y]$.
נסמן ב M את מספר הנקודות המיוחדות מבין ה N שנבחרו.
חשב את התוחלת של M.

פתרון ראשון. את הנקודות אפשר למיין בסדר עולה לפי x או לפי y, הסדרים האלה יהיו בלתי תלויים כי קואורדינאטות שונות של כל נקודה לא תלויות אחת בשנייה.
הנקודה הראשונה לפי x, היא מיוחדת בסיכוי של 1.
הנקודה השנייה לפי x, היא מיוחדת בסיכוי של ½.
הנקודה השלשית לפי x, היא מיוחדת בסיכוי של $\frac{1}{3}$.
...
הנקודה מספר N לפי x, היא מיוחדת בסיכוי של $\frac{1}{N}$.
כמות של נקודות מיוחדות זה סכום של אינדיקאטורים של מיוחדות של נקודה מספר K לפי x (כלומר משתנים מקריים ששווים ל-1 אם נקודה מספר K לפי x ושווים ל-0 אחרת).
לכן התוחלת שאנו מחפשים היא סכום התוחלת של האינדיקאטורים האלה כלומר

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N} \approx \ln N + \gamma$$

פתרון שני (ראש בקיר). ניקח נקודה, שנמצאת במיקום (x,y). היא מיוחדת אם כל נקודה אחרת נמצאת מחוץ למלבן ששטחו xy. הסתברות לנקודה אחרת להימצא מחוץ למלבן זה $1-xy$ והסתברות שכל הנקודות כך היא $(1-xy)^{N-1}$.

נגדיר משתנה מקרי ששווה 1 כאשר נקודה נתונה מיוחדת ושווה 0 אחרת. תוחלת של משתנה מקרי זה שווה $(1-xy)^{N-1}dxdy$ ותוחלת של כמות הנקודות המיוחדת גדולה פי N כי הכמות שווה לסכום של N מ"מ כאלה. לכן התשובה מתקבלת ע"י חישוב אינטגרל.

$$N\int_0^1\int_0^1(1-xy)^{N-1}dxdy=\int_0^1\left(\frac{(1-xy)^N}{-y}\Bigg|_0^1\right)dy=\int_0^1\left(\frac{(1-y)^N}{-y}-\frac{1}{-y}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1-(1-y)^N}{y}\right)dy=\int_0^1\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}(-y)^{k-1}dy=\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

התשובה $\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ היא נכונה אבל היא פחות יפה ואלגנטית מאשר $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{\mathrm{N}}$, וכמובן, שתי התשובות זהות.

פתרון שלישי. נלך בשיטה השנייה (ראש בקיר) עד שנקבל את התשובה בתור אינטגרל

$$\int_0^1\left(\frac{1-(1-y)^N}{y}\right)dy$$

כרגע, במקום לפתוח סוגריים נבצע הצבה $z=1-y$ ונקבל

$$\int_0^1\left(\frac{1-(1-y)^N}{y}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{1-z^N}{1-z}\right)dz=\int_0^1\left(1+z+z^2+...+z^{N-1}\right)dz=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{\mathrm{N}}$$

4. נתונים 6 מספרים ממשיים $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.
נתבונן בקבוצת כל הנקודות שמקיימות את שני האי-שוויונים:

$$z_1-z>\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$z-z_2>\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

חשב את הנפח של קבוצה זו.

פתרון ראשון (גיאומטריה אנליטית).
קל לראות שכל אי-שוויון מגדיר חרוט. בשביל שיהיה לשני חרוטים האלה חיתוך לא ריק, צריך שאחד יכיל את הקודקוד של השני. אכן אם נחבר את אי-שוויונים נקבל

$$z_1 - z_2 > \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

אבל לפי אי-שוויון המשולש

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} \geq \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

הצורה תהיה חסומה בכל מקרה, הרי אפילו

$$\begin{cases} z_1 > z \\ z - z_2 > \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} \end{cases}$$

מגדיר צורה חסומה.
לצורה יש גבול שחלקו – המשטח של החרוט הראשון וחלקו – משטח של החרוט השני. אז חייב להיות קו חסום שמפריד בין שני החלקים של הגבול.
חיתוך בין שני משטחי החרוטים הוא קו. הוא מקיים שתי משוואות

$$z_1 - z = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$z - z_2 = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

נעלה את שתי המשוואות בריבוע ונחסיר. כאשר מעלים משוואה כזאת בריבוע מקבלים משוואה מסדר 2 שבאגף ימני יש את x^2+y^2 ובאגף שמאלי יש את z^2 וכאשר נחסיר איברים ריבועים יצטמצמו ונקבל משוואה ליניארית. לכן קו ההפרדה נמצא במישור.
חתך של חרוט כזה ע"י מישור הוא כידוע אליפסה, פרבולה או ענף של היפרבולה. אצלנו יש קו חסום, לכן זה אליפסה. המישור הזה חותך את צורה לשני חלקים, שכל אחד מהם הוא "כוס גלידה" (כלומר חרות שנחתך ע"י מישור לאורך אליפסה).
נפח של כזה חרות, כמו של פירמידה שווה ל Sh/3 כאשר S שטח האליפסה, h גובה החרות (כלומר מרחק מקודקוד למישור האליפסה).
נסמן $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$. התמונה סימטרית ביחס ל-M שהוא אמצע AB.
לכן בעצם שתי הגלידות חופפות.
נעביר מישור P שעובר דרך A, B, שעובר דרך (או מכיל את) ציר ה-z. למישור זה יש שתי נקודות שמשותפות לשני החרוטים E, F. כל אחד משני החרוטים סימטרי ביחס למישור P.
לכן EF אחד מצירי האליפסה. הציר השני של אליפסה מאונך ל-EF.
באמצעות גיאומטריה אנליטית אפשר לחשב את שני חצאי הצירים ואת הגובה של הגלידה, להכפיל את שלושתם ולהכפיל במקדם. זה פחות מעמוד של חישובים, אבל אנחנו נוותר על התענוג (ונשאיר אותו לקורא העקשן).

פתרון שני. (פתרון גיאומטרי, דומה לפתרון שכתב אלכסיי גלדקיך בתחרות).
נסמן $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$. התמונה סימטרית ביחס ל-M שהוא אמצע AB. נעביר מישור P שעובר דרך A, B, שעובר דרך (או מכיל את) ציר ה-z. למישור זה יש שתי נקודות שמשותפות לשני החרוטים E, F. כל אחד משני החרוטים סימטרי ביחס למישור P.
נעביר מישור Q שמאונך למישור P ומכיל את E, F. הוא חותך כל קונוס לאורך אליפסה. אבל אליפסה זו סימטרית לגבי מישור P, לכן EF הוא הקוטר שלה. לכן כל אליפסה כזאת סימטרית ביחס ל-M. לכן זו אותה אליפסה.
לכן הצורה שאנו מעוניינים בה מורכבת משני חלקים זהים, שכל אחד מהם מחרות שנחתך ע"י מישור לאורך אליפסה. נפח של כל חלק שווה ל Sh/3 כאשר S שטח האליפסה, h גובה החרות (כלומר מרחק מקודקוד למישור האליפסה). לכן נפח שצריך למצוא הוא 2Sh/3. נשאר לחשב את S ואת h.
אפשר לבטא את השטח של אליפסה באמצעות πpq כאשר p,q הם חצאי צירים.
אבל אנו נזדקק לביטוי אחר.

טענה. נניח שמוקד של אליפסה מחלק את הציר הארוך לקטעים באורך a,b. אז שטח האליפסה $\pi\sqrt{ab}\,\frac{a+b}{2}$.

הוכחת טענה. ברור שחצי הציר הארוך של האליפסה הוא $\frac{a+b}{2}$.
חצי הציר הקצר q הוא ניצב במשולש ישר זווית שקודקודיו: מוקד האליפסה, מרכז האליפסה ונקודה על האליפסה שהכי קרובה למרכז. כל להבין שהיתר $\frac{a+b}{2}$ והניצב השני הוא $\frac{a-b}{2}$ ומכאן לפי משפט פיתגורס מתקבל q.

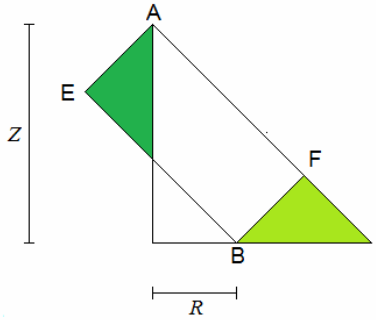
נצייר את הכדור שמשיק לחרות שקודקודו A ולמישור Q של אליפסת החיתוך. זהו כדור דנדלין (http://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres) של האליפסה והוא, כידוע, משיק למישור של האליפסה במוקד שלה.
נתבונן במישור P. יש בוא את המלבן AEBF, והכדור שציירנו הוא מעגל חסום במשולש AEF.
הציר הארוך של האליפסה זה קטע EF. המעגל החסום של AEF משיק ל-EF בנקודה T.
אנו צריכים לחשב את $a=\mathrm{ET}$, $b=\mathrm{FT}$, ואת h שהוא גובה של המשולש EFA מהזוויות הישרה A ואז, לפי הטענה שכבר הוכחנו , התשובה תהיה $\frac{2}{3}\pi h\sqrt{ab}\,\frac{a+b}{2}$.
נשאיר חלק קטן מהחישוב עבר קוראים בתור תרגיל:
תרגיל. נניח שבמשולש ישר זווית המעגל החסום מחלק את היתר לקטעים באורך a,b אז שטח המשולש היא ab.

אבל $\frac{h(a+b)}{2}=S_{\text{AFE}}$.

לכן התשובה מקבלת צורה: $\frac{2}{3}\pi h\sqrt{ab}\,\frac{a+b}{2}=\frac{2\pi}{3}\sqrt{S_{\text{AFE}}}\cdot S_{\text{AFE}}=\frac{2\pi}{3}\left(S_{\text{AFE}}\right)^{3/2}$

שטח של משולש AFE שווה למחצית שטח המלבן AEBF.

נסמן $Z=z_2-z_1$, $R=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$. בציור רואים כיצד לחשב את השטח של AEBF. חותכים ממנו משולש ומעבירים אותו לצד השני.



אז נוצר טרפז,ששטחו שווה להפרש של שני שטחי משולשים שווי-צלעות וישרי זוויות, לגדול יש ניצבים באורך Z ולקטן ניצבים באורך R.

$$2S_{\text{AFE}}=S_{\text{AFBE}}=\frac{Z^2-R^2}{2}$$

$$\sqrt{S_{\text{AFE}}}=\frac{\sqrt{Z^2-R^2}}{2}$$

ומכאן התשובה הסופית:

$$\frac{2\pi}{3}\left(S_{\text{AFE}}\right)^{3/2}=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{Z^2-R^2}}{2}\right)^3=\frac{\pi}{12}\left(Z^2-R^2\right)^{3/2}$$

פתרון שלישי (מקורי). נבצע טרנספורמציית ששומרות על נפח ועל צורה של חרוטים. קודם כל, אפשר לבצע הזזה – מחסירים את הווקטור (x_2,y_2,z_2) מכל הווקטורים ואז השאלה מקבלת רישום פשוט יותר. בנוסף, אפשר לבצע סיבובים של מישור xy, זה שומר גם על נפח וגם על צורה של חרוטים. בצורה כזאת אפשר להגיע למצב שקודקוד של חרוט אחד הוא $(0,0,0)$ ושל השני $(x_1,0,z_1)$, כאשר בעצם x_1,z_1 השתנו.

יש עוד העתקה ששומרת על תבנית ריבועית $z^2-x^2-y^2$ ועל צורת החרוטים האלה. נניח כי $S<C$ ומתקיים $C^2-S^2=1$. נתבונן בהעתקה ליניארית שמוגדרת ע"י מטריצה:

$$\begin{pmatrix} C & 0 & S \\ 0 & 1 & 0 \\ S & 0 & C \end{pmatrix}$$

ברור שדטרמיננטה =1, לכן היא שומרת נפח. קל לבדוק גם שהיא שומרת (על התבנית הריבועית $z^2-x^2-y^2$, באמצעות הצבה ישירה או קפל מטריצות:

$$\begin{pmatrix} C & 0 & S \\ 0 & 1 & 0 \\ S & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 & S \\ 0 & 1 & 0 \\ S & 0 & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נבחר $C=\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2-x_1^2}}, S=\frac{-x_1}{\sqrt{z_1^2-x_1^2}}$ (ברור כי $z_1 > x_1$ אחרת החרוטים לא נחתכים ונפח החיתוך הוא 0). אז העתקה ליניארית זו תעביר את הנקודה $(x_1,0,z_1)$ לנקודה על ציר z. ובכן הגענו למצב שקודקודי החרוטים הם $(0,0,0)$, $(0,0,H)$. הצורה שהתקבלה היא איחוד של שני חרוטים שגובה של כל אחד מהם R ורדיוס של הבסיס גם R כאשר $H/2 = R$.

לכן נפח של כל חלק הוא $\pi R^3/3$ ונפח הכולל $\frac{2}{3}\pi R^3$.

נשאר לבטא את R במושגים של קואורדינאטות שהיו בהתחלה. אבל כל הפעולות שעשינו שומרות על הביטוי $(z_1-z_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2$ ולכן

$$H=\sqrt{(z_1-z_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}$$

$$R=\frac{\sqrt{(z_1-z_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}}{2}$$

והתשובה הסופית היא

$$\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{\pi}{12}\left((z_1-z_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2\right)^{3/2}$$

הערה. העתקות ששומרות על תבנית $x^2+y^2-z^2$ יוצרות חבורה שידוע בשם O(2,1) שמופיעה הרבה בגיאומטריה היפרבולית ובתורת היחסות הפרטית.

5. נתונה שורת נורות אינסופית. כל נורה נמצאת במצב דלוק או כבוי.
כל דקה מכבים כל נורה ששתי הנורות שנמצאות לידה נמצאות במצב שונה,
ומדליקים כל נורה ששתי הנורות שלידה היו במצב זהה.
נמספר את הנורות באמצעות המספרים השלמים **Z**.
נסמן ב f(i,t) את מצב הנורה i בזמן t (1 אם הנורה דולקת, 0 אחרת).
התאורה נקראת מחזורית לפי זמן אם קיים A שלם שונה מ-0 כך ש f(i, t+A) = f(i,t)
לכל i,t.
התאורה נקראת מחזורית לפי מרחב אם קיים B שלם שונה מ-0 כך ש f(i+B, t) = f(i, t).
לכל i,t. יש להוכיח כי

א. אם התאורה מחזורית לפי מרחב אזי היא מחזורית לפי זמן.
ב. אם התאורה מחזורית לפי זמן אזי היא מחזורית לפי מרחב.

פתרון. הבעיה מבוססת על עיקרון פשוט. אם נתונה קבוצה סופית (שמכילה N איברים),
ונתון כלל שקובע לפי איבר נוכחי, איזה איבר צריך לקחת אחרי איבר נוכחי. נניח שאנחנו
מתחילים באיבר מסוים ומפעילים את הפעולה הזאת הרבה פעמים. אז סדרת איברים
שמתקבלת תתחיל להיות מחזורית (אחרי N פעולות לכל היותר).
באולימפיאדת SEEMOUS ב-2007 שתי בעיות מתוך 4 היו מבוססות על העיקרון הזה.

קל מאוד להוכיח את העיקרון הזה. אחרי צעד N+1 יופיע איבר שכבר היה קודם, אחרי צעד
K למשל. בגלל שהמשך הסדרה נקבע ע"י איבר בודד אז המשך הסדרה אחרי איבר K זהה
להמשך הסדרה אחרי איבר N+1 לכן מאיבר K והלאה יש מחזור N + 1 – K .

כמובן אם הסדרה היא אינסופית לשני הכיוונים (כלומר אם אינדקס הולך ממינוס אינסוף עד
אינסוף), אז הסדרה היא מחזורית לגמרי ולא רק מחזורית החל ממקום מסוים הרי עבור כל
אינדקס נתון M אפשר להתבונן באינדקס M – N ולהסיק שמחזור התחיל כבר קודם.

הייתה בעיה בניסוח של סעיף א' שהרבה סטודנטים שמו לב אליה.
כוונת המשוררים הייתה שהזמן t הוא מספר שלם שהולך ממינוס אינסוף עד פלוס אינסוף.
זה לא צוין בניסוח ורוב האנשים הבינו באופן טבעי שזמן t הוא מספר טבעי.
אז יוצא שהמחזור עלול לא להתחיל ברגע הראשון אלה כעבור זמן מה.
למשל, אם מתחילים במצב ...10101010101... אז המצב הזה כבר לא יחזור על עצמו.
כל הסטודנטים שהבינו את השאלה בצורה הטבעית וציינו שהשאלה שגויה קיבלו ציון מלא על
סעיף א'. בכל מקרה, מחברי השאלון מתנצלים על אי-דיוק בניסוח.

א. יש מספר סופי (2^B) של מצבי תאורה מחזוריים במרחב בעלי מחזור B. מצב נוכחי של
תאורה קובע באופן חד-משמעי את המצב הבא. לכן, לפי העיקרון שהסברנו, החלפת מצבי
תאורה היא מחזורית, כלומר התאורה מחזורית לפי זמן.

ב. נניח שהתאורה מחזורית לפי זמן. לכן להתנהגות של כל נורה ספציפית יש מחזור משלה
באורך A. לכן יש רק 2^A דרכי התנהגות מסוימות אפשריות לנורה כלשהי.

לפי הגדרה, מצב נורות i, i+2 ברגע t קובע את מצב הנורה i+1 ברגע t+1. מהכלל שמקשר בין 3 מצבים אלה ברור שמצב של נורה i+1 ברגע t+1 ושל נורה i ברגע t קובעים את מצב של נורה i+2 ברגע t. לכן ברור שמי שיודע את ההתנהגות של נורות i, i+1 יכול לקבל גם את ההתנהגות של נורה i+2.
לכן יש כלל שמחשב לפי התנהגות של זוג נורות צמודות i, i+1 את התנהגות של זוג נורות צמודות i+1, i+2 . מצד שני, התנהגות של זוג נורות צמודות שייכת לקבוצה סופית של 4^A איברים. לכן לפי העיקרון שהסברנו, זה מחזורי לפי מרחב.