אולימפיאדת סטודנטים-מבחן מיון.

תשס"ח (2007-2008) – שלב ראשון.

משך המבחן 4 שעות.

1. תהא $\mathbf{X}$ מטריצה 2×2 מעל הרציונאליים,
אשר מקיימת $\mathbf{X}^2 = 2\mathbf{I}$, כאשר $\mathbf{I}$ זו מטריצת יחידה.
א. חשב את trace $\mathbf{X}$
ב. חשב את det $\mathbf{X}$

2. תהא f פונקציה על הממשיים בעלת נגזרת רציפה מכל סדר אשר מקיימת $|f(x)| < A$ לכל x.
הוכח כי f"(x) (נגזרת שנייה של f) מתאפסת בנקודה מסוימת.

3. בוחרים N נקודות מקריות באופן בלתי תלוי ובהתפלגות אחידה בתוך הריבוע $[0,1]\times[0,1]$.
נקודה (x,y) שנבחרה נקראת נקודה מיוחדת אם לא נבחרו נקודות אחרות במלבן $[0,x]\times[0,y]$.
נסמן ב M את מספר הנקודות המיוחדות מבין ה N שנבחרו.
חשב את התוחלת של M.

4. נתונים 6 מספרים ממשיים $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.
נתבונן בקבוצת כל הנקודות שמקיימות את שני האי-שוויונים:

$$z_1 - z > \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$$

$$z - z_2 > \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$$

חשב את הנפח של קבוצה זו.

5. נתונה שורת נורות אינסופית. כל נורה נמצאת במצב דלוק או כבוי.
כל דקה מכבים כל נורה ששתי הנורות שנמצאות לידה נמצאות במצב שונה,
ומדליקים כל נורה ששתי הנורות שלידה היו במצב זהה.
נמספר את הנורות באמצעות המספרים השלמים $\mathbf{Z}$.
נסמן ב f(i,t) את מצב הנורה i בזמן t (1 אם הנורה דולקת, 0 אחרת).
התאורה נקראת מחזורית לפי זמן אם קיים A שלם שונה מ-0 כך ש $f(i, t+A) = f(i,t)$ לכל i,t.
התאורה נקראת מחזורית לפי מרחב אם קיים B שלם שונה מ-0 כך ש $f(i+B, t) = f(i, t)$.
לכל i,t. יש להוכיח כי

א. אם התאורה מחזורית לפי מרחב אזי היא מחזורית לפי זמן.
ב. אם התאורה מחזורית לפי זמן אזי היא מחזורית לפי מרחב.

בהצלחה!