**5.** *בשורה של 100 משבצות, בכל משבצת נמצא כלי משחק (כל הכלים שונים). במחיר של שקל אחד ניתן להחליף מקומות בין שני כלים אשר נמצאים במשבצות סמוכות. ניתן גם, ללא עלות, להחליף מקומות בין שני כלים אשר בינם נמצאים 4 כלים בדיוק. מהו המחיר המינימלי שצריך לשלם על מנת לסדר את כל הכלים בסדר ההפוך לסדר ההתחלתי?*

**תשובה**: 50 שקלים.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**פתרון.** נצבע את משבצות השורה ב-5 צבעים לפי הסדר הבא: כחול, כתום, אדום, צהוב, ירוק, ואז שוב כחול, וכך הלאה. כל שני כלים הכי קרובים של צבע מסוים ניתן להחליף זה עם זה בחינם, באמצעות הרבה פעולות כאלה אפשר בחינם לסדר מחדש את הכלים שנמצאים על משבצות בצבע מסוים בכל שיטה שמתחשק לנו. נגיד הכלי שצריך להגיע לצד השמאלי נגרור הכי שמאלה שאפשר (בתוך אותו הצבע), את הכלי השני שצריך להגיע הכי שמאלה נגרור שמאלה עד שהוא נכנס למקומו, וכו'.

דבר שכמובן יש לו עלות זה להעביר כלים ממשבצות של צבע אחד למשבצות מצבע אחר. צריך לערב מהלכים מהסוג הראשון: להחליף זוגות של כלים סמוכים; לזה יש עלות של שקל וניתן להגיד באופן שקול שהזזנו שני כלים למשבצות מצבעים הפוכים בעלות של חצי שקל לכלי.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

כאשר רוצים שכל כלי יזוז למיקום הפוך, אז כל כלי חייב לעבור ממשבצת כחולה לירוקה או להפך, וממשבצת צהובה לכתומה או להפך (ואלה במשבצות אדומות חייבות להישאר במשבצות אדומות). אפשר להפוך את השאלה לשאלה שקולה: 100 כלים נמצאים ב-5 קופסאות צבעוניות שמסודרות במעגל, 20 בכל קופסה (לקופסאות יש צבעים כמו בצביעה שהייתה לנו). מותר בכל תור להחליף בין שני כלים בקופסאות סמוכות, בעלות של שקל. כמה צריך לשלם על מנת להחליף בין מה שיש בקופסאות כחולה וירוקה (הסמוכות) ולהחליף בין קופסאות צהובה וכתומה (שהן לא סמוכות)?

לכל כלי אפשר לכתוב, מה המרחק שהוא עוד צריך לעבור בשביל להגיע ליעד. אם הוא כבר בקופסה נכונה, אז המספר הוא 0, אם הוא בקופסה שסמוכה לקופסת היעד המספר הוא 1, ואם הוא בקופסה נגדית לקופסת היעד נרשום 2. במצה ההתחלתי יש 40 כלים שהמרחק שלהם מהיעד 1, 40 כלים שהמרחק שלהם מהיעד שווה 2, ו-20 כלים שזה 0, לכן סכום כל המספרים הוא 120. בכל מהלך שני כלים עוברים לקופסה סמוכה, וכל כלי יכול להקטין את המספר שלו ב-1 לכל היותר, כלומר סכום המספרים יכולה לרדת ב-2 לכל היותר תמורת כל שקל. לכן אם רוצים להוריד את סכום המספרים מ-120 ל-0 צריכים לשלם 60 שקל.

אבל אם רוצים לשלם רק 60 שקל, במקרה זה צריכים שכל מהלך יקדם את שני הכלים שמשתתפים במהלך אלה כלפי היעד שלהם. כלומר אסור להזיז את הכלים שנמצאים בקופסה אדומה, כלומר המהלכים לא יכולים להשתמש בקופסה אדומה. כלומר כל כלי מקופסה כתומה יכול להגיע לקופסה צהובה רק מסביב, לכן המהלך הראשון שהכלי יעשה צריך להיות לקופסה כחולה אבל זה לא מקדם אותו על היעד (המרחק נשאר 2). לכן 60 שקלים זה בלתי אפשרי.

נוכיח שניתן לעשות זאת ב-61 מהלכים. תוך 20 מהלכים ניתן להחליף בזוגות בין הכלים בקופסה ירוקה לבין הכלים בקופסה כחולה.

לאחר מכן נעשה מהלך שיחליף בין שני כלים: אחד מקופסה כתומה השני מהקופסה האדומה. לאחר מכן נעשה זוגות של מהלכים מהסוג הבא:

הכלי שהגיע מקופסה כתומה ימשיך את דרכו לקופסה צהובה, וכלי מקופסה צהובה (שהיה שם מהתחלה) יכנס לקופסה אדומה.

הכלי שהגיע מקופסה צהובה לקופסה אדומה ימשיך את דרכו לקופסה כתומה, וכלי מקופסה כתומה שהיה שם מהתחלה יחליף אותו בקופסה אדומה.

בכל זוג מהלכים מסוג זה כלי אחד מקופסה צהובה יעשה את דרכו לקופסה כתומה, וכלי אחד מקופסה כתומה יסיים את דרכו ליעד וכלי שני יתחיל את דרכו. אם ננסה לעשות 20 זוגות מהלכים כאלה, אז במהלך האחרון נגלה שכבר אין בקופסה כלי שהיה מהתחלה בקופסה הכתומה כי כולם כבר עברו, ואז הכלי שהיה בהתחלה בקופסה האדומה יחליף אותו ויחזור למקום.

כלומר עשינו מהלך ועוד 20 זוגות של מהלים והחלפנו בין הכלים בקופסא צהובה וכתומה, לכן זה 41 מהלכים, ביחד עם עוד 20 מהלכים זה 61.