**4.** נתון מצולע, שכל שתי צלעות סמוכות שלו מאונכות. שני קודקודים שלו נקראים **עוינים** אם חוצי הזוויות של שני הקודקודים מאונכים. הראו שלכל קודקוד יש כמות זוגית של קודקודים עוינים.

**פתרון.** עם נסובב את התמונה כך שאחת הצלעות תהיה אופקית, אז כל צלע תהיה אופקית או אנכית, וכל חוצה זווית הוא בין צלע אופקית לצלע אנכית כלומר בשיפוע של 45 מעלות. יש שני כיוונים כאלה (מסומנים ירוק ואדום בציור): צפון מזרח – דרום מערב או דרום מזרח – צפון מערב.

בעצם צריך להוכיח שיש מספר זוגי של חוצי-זוויות בכל כיוון (או בכל צבע בציור כמו שלנו). נניח שחורפן עושה טיול מסביב למצולע לאורך ההיקף של סיבוב אחד וחוזר לנקודה ההתחלתית. בכל רגע מסמנים, באיזה כיוון הוא מתקדם: צפונה, דרומה, מזרחה או מערבה. כאשר הוא מחליף כיוון מצפונה למזרחה, ממזרחה לצפונה, מדרומה למערבה או ממערבה לדרומה אז חוצה הזווית ירוק, ובשאר המקרים חוצה הזווית אדום.

ניתן לצייר את המפה של כל 4 הכיוונים שאפשר לנוע בהם, וששני אלכסונים: אחד ירוק ואחד אדום; כל פעם כשמחליפים כיוון, אם קופצים מעל הקו הירוק חוצה הזווית יהיה ירוק ואם קופצים מעל הקו האדום חוצה הזווית יהיה אדום. על מנת להוכיח שיש מספר זוגי של חוצי הזוויות הירוקים, צריך להוכיח שבמפת הכיוונים נקפוץ מעל קו ירוק מספר זוגי של פעמים, וזה נכון כי המסלול סגור ובסופו של דבר חוזרים למצב שהתחלנו ממנו.