**3.** מותר להחליף מספר  שכתוב על הלוח במספר  או במספר  (כלומר המספר השלם הגדול ביותר שלא גדול מ-). הראו שאם על הלוח כתוב המספר 1, אפשר להגיע לכל מספר טבעי.

**פתרון** **ראשון**. נוכיח באינדוקציה. נניח ש- הוא הקטן ביותר שעוד לא הוכחנו שאפשר לקבל אותו, נוכיח שאפשר לקבל גם אותו.

נפריד למקרים בהתאם לשארית החלוקה של  ב-3.

***מקרה ראשון.*** , כאשר  טבעי. אז כבר הוכח שאפשר לקבל , לכן אפשר לקבל גם  באמצעות המהלך מהסוג הראשון.

***מקרה שני.*** , כאשר  טבעי. מספיק להראות שניתן לקבל את



ואז נחלק ב-2. לכן מספיק להראות שניתן לקבל  וזה נכון כי זה קטן מ-.

(יש כאן תת-מקרה מיוחד של , כי אז  ואז לא באמת נכון ש- קטן מ‑, אבל ניתן לפתור את זה עדיין בצורה דומה: מ-1 עוברים ל-4 ואז מחלקים ב-2 פעמיים).

***מקרה שלישי.*** , כאשר  טבעי. ניתן לקבל את  בתור  כאשר  הוא אחד מהשניים: או  או . אבל  בוודאות אפשר לקבל לפי הנחת האינדוקציה, לכן ניתן לקבל גם , ומכאן את .

כלומר בכל 3 המקרים ניתן לקבל את המספר.

**פתרון שני.** נוכיח שניתן לקבל כל מספר כאשר בהתחלה עושים רק מהלכים מהסוג , ובסוף רק מחלקים ב-2 מספר פעמים.

הסדרה שנוצרת כאשר מתחילים מ-1 וכל פעם הופכים  ב- היא , או במילים אחרות . קל לראות באינדוקציה שאלה בדיוק המספרים שמתקבלים.

נגיד שאנחנו רוצים בסוף לקבל את , אחרי שמספר פעמים מחלקים ב-2. המספר הקודם צריך להיות לפחות  אבל קטן מ-. המספר שלפניו לפחות  אבל קטן ממש מ-. המספר שבא עוד קודם הוא לפחות  אבל קטן ממש מ-, וכך הלאה.

אם נחליף כל מספר  ב- (הלוגריתם שלו בסיס 2), נקבל שהקטע שבו רוצים שהמספר יהיה כל פעם מוזז ב-1. לכן אם נחליף כל מספר  במספר  (החלק השבור של הלוגריתם של 2), אז המספר שלנו שנקבל מספר  עבורו  נמצא בתחום מסוים (בין  כולל לבין  לא כולל).

אז בעצם היינו רוצים ש- יהיה באחד הקטעים האלה, במילים אחרות (כשמוסיפים 1 למספר) ש- יהיה בתחום בין  כולל לבין  לא כולל.

המשך הפתרון מתחלק לשתי טענות:

**טענה 1.**  אי-רציונאלי.

**טענה 2.** לכל  אי-רציונאלי, הסדרה  תבקר בכל קטע בין 0 ל-1.

משתי הטענות נובעת השאלה. אכן, בדיוק צריך להוכיח שעבור  המספר  נמצא בין  כולל לבין .

**הוכחת טענה 1.** נניח אחרת: , כאשר  מספר שלם,  שלם חיובי. אז , כלומר , אבל  לכן , לכן , לכן  חיובי, לכן בזהות  אגף שמאל זוגי וימין אי-זוגי, לכן זו זהות שגויה.

**הוכחת טענה 2.** אנו נרצה להוכיח כי לכל  ולכל  אי-רציונלי, קיים  עבורו . נבחר מספר טבעי  כך ש- (בשביל זה מספיק לקחת ). נחלק את הקטע  ל- קטעים שווי-אורך



מבין המספרים  יהיו שתיים באותו הקטע, נגיד שהם ו-, כאשר . אז  נמצא או ב- או ב- ולכן הסדרה  מתקדמת בצעדים קטנים מ-, ובהכרח מבקרת בקטע .