**2.** נתונים שלמים חיוביים  כך שעבור אינסוף שלמים חיוביים , המספר  מתחלק במספר . האם בהכרח ?

**תשובה**: כן. בהכרח .

**פתרון ראשון.** גם  וגם  מתחלקים ב-, לכן גם ההפרש שלהם, כלומר  מתחלק ב-. נגיד כי  ואז ניתן לרשום  כאשר  זרים, ואז גילינו בעצם כי  מתחלק ב-. במילים אחרות  מתחלק ב- עבור כל . אבל קל לראות כי  ו- זרים, הרי אם יש ראשוני שמחלק את שניהם הוא גם מחלק את  ולכן גם את  וגם את  ולכן גם את  ושניהם שווים.

לכן בעצם מכיוון ש- מתחלק ב-, אז אפילו  מתחלק ב-. אבל חוץ מהמקרה  (שזה בדיוק מקרה שבו ) המספר  נהיה גדול ממש עבור  גדול, גדול יותר מערך המוחלט של , והדרך היחידה ש- יכול להתחלק בו הוא כאשר , כלומר בכל מקרה  ולכן .

**פתרון שני.** נוכיח קודם כל **טענת עזר:** נראה שאם $a,b$ זרים, אז המחלק המשותף המקסימלי ($gcd$) של $a^{n+1}+b^{n+1}$ *ושל-* $a^{n}+b^{n}$ *הוא או 1 או 2.*

***הוכחה לטענת העזר****: באינדוקציה על* $n$*. עבור* $n=0$ *הטענה טריוויאלית. כעת נניח שהטענה נכונה ל-* $n$ *ונוכיח אותה ל-*$ n+1$*. מתקיים:*

$\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)\left(a+b\right)-\left(a^{n+2}+b^{n+2}\right)=ab\left(a^{n}+b^{n}\right)$.

*לכן אם היה ל-* $a^{n+1}+b^{n+1}$ *ול-* $a^{n+2}+b^{n+2}$ *איזשהו מחלק ראשוני משותף* $p$*, אז הוא היה חייב לחלק גם את* $ab\left(a^{n}+b^{n}\right)$*. אבל לא ייתכן שהוא מחלק את* $a$ *(כי אז הוא מחלק גם את* $a$ *וגם את* $a^{n+1}+b^{n+1}$*, ולכן הוא חייב לחלק גם את* $b$*, בסתירה להנחה שהם זרים). באותה מידה לא יתכן ש*$ p$*יחלק את* $b$*, ולכן* $p$ *מחלק את* $a^{n}+b^{n}$ *כלומר הוא מחלק ראשוני משותף גם של* $a^{n}+b^{n}$ *ושל* $a^{n+1}+b^{n+1}$ *ולכן לפי הנחת האינדוקציה* $p=2$*.*

*כלומר אם היה ל-* $a^{n+1}+b^{n+1}$ *ול-* $a^{n+2}+b^{n+2}$ *איזשהו מחלק ראשוני משותף, אז הוא בהכרח שווה ל*$2$*. ולכן ה*$ gcd$*שלהם הוא או 1 או איזשהי חזקה של* $2$*. נשאר לנו להראות שלא יתכן שה*$ gcd$*מתחלק ב-4. בשביל זה מספיק לשים לב שלכל* $k$ *שלם אי שלילי, המספר* $a^{2k}+b^{2k}$ *הוא סכום ריבועים, וסכום ריבועים מתחלק ב-4 רק כאשר שני הריבועים מתחלקים ב4. אבל אז זה היה אומר ש*$ a,b$*שניהם זוגיים, בסתירה להנחה שהם זרים.*

*עד כאן ההוכחה של טענת העזר* $∎$

נחזור לטענה המקורית: נניח בשלילה שקיימים $a,b$ שלמים חיוביים **שונים** (לאו דווקא זרים) המקיימים את תנאי השאלה. נסמן ב $g$ את המחלק המשותף הגדול ביותר של $a,b$. נניח: $a=ga\_{1}$ *ו-* $b=gb\_{1}$ *כאשר* $a\_{1},b\_{1}$ *זרים. כעת לכל* $n\geq 1$*, אם* $a^{n+1}+b^{n+1}$ מתחלק ב- $a^{n}+b^{n}$, אז גם $\left(a^{n}+b^{n}\right)\left(a+b\right)-\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)$ מתחלק ב- $a^{n}+b^{n}$. ולכן $ab\left(a^{n-1}+b^{n-1}\right)$ מתחלק ב- $a^{n}+b^{n}$.

כלומר $g^{n+1}a\_{1}b\_{1}\left(a\_{1}^{n-1}+b\_{1}^{n-1}\right)$ מתחלק ב-$g^{n}\left(a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}\right)$,

ולכן $ga\_{1}b\_{1}\left(a\_{1}^{n-1}+b\_{1}^{n-1}\right)$ מתחלק ב- $a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}$.

*אבל* $a\_{1}$ *זר ל-* $a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}$ *(אם היה להם מחלק ראשוני משותף אז הוא היה מחלק גם את* $b\_{1}$ *בסתירה להנחה ש*$a\_{1},b\_{1}$ *זרים), וגם* $b\_{1}$ *זר ל-*$a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}$ *מאותה סיבה, ולכן זה אומר ש:* $g\left(a\_{1}^{n-1}+b\_{1}^{n-1}\right)$ *מתחלק ב-* $a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}$*.*

*אבל מטענת העזר, ה*$ gcd$ *של* $a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}$ *ושל* $a\_{1}^{n-1}+b\_{1}^{n-1}$*, הוא לכל היותר* $2$*. ולכן יש שני מקרים:*

*אם ה*$ gcd$*שלהם הוא 1, נסיק ש* $g$ *מתחלק לגמרי ב-* $a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}$*.*

*ואם ה*$ gcd$*שלהם הוא 2, נסיק ש* $ g$*מתחלק ב-* $\frac{a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}}{2}$*.*

*כלומר בכל מקרה מתקיים:* $g\geq \frac{a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}}{2}$

*אבל אם ה-*$ a,b$*המקוריים היו* ***שונים****, אז בהכרח* $a\_{1},b\_{1}$***לא שניהם*** *1, כלומר אחד מהם בוודאות גדול מ1. ולכן לא ייתכן ש* $g\geq \frac{a\_{1}^{n}+b\_{1}^{n}}{2}$ *קורה עבור אינסוף* $n$ *–ים.*

*כנדרש.*$∎$