**2.** נתונים שלמים חיוביים  כך שעבור אינסוף שלמים חיוביים , המספר  מתחלק במספר . האם בהכרח ?

**תשובה**: כן. בהכרח .

**פתרון ראשון.** גם  וגם  מתחלקים ב-, לכן גם ההפרש שלהם, כלומר  מתחלק ב-. נגיד כי  ואז ניתן לרשום  כאשר  זרים, ואז גילינו בעצם כי  מתחלק ב-. במילים אחרות  מתחלק ב- עבור כל . אבל קל לראות כי  ו- זרים, הרי אם יש ראשוני שמחלק את שניהם הוא גם מחלק את  ולכן גם את  וגם את  ולכן גם את  ושניהם שווים.

לכן בעצם מכיוון ש- מתחלק ב-, אז אפילו  מתחלק ב-. אבל חוץ מהמקרה  (שזה בדיוק מקרה שבו ) המספר  נהיה גדול ממש עבור  גדול, גדול יותר מערך המוחלט של , והדרך היחידה ש- יכול להתחלק בו הוא כאשר , כלומר בכל מקרה  ולכן .

**פתרון שני.** נוכיח קודם כל **טענת עזר:** נראה שאם זרים, אז המחלק המשותף המקסימלי () של  *ושל- הוא או 1 או 2.*

***הוכחה לטענת העזר****: באינדוקציה על . עבור הטענה טריוויאלית. כעת נניח שהטענה נכונה ל- ונוכיח אותה ל-. מתקיים:*

.

*לכן אם היה ל- ול- איזשהו מחלק ראשוני משותף , אז הוא היה חייב לחלק גם את . אבל לא ייתכן שהוא מחלק את (כי אז הוא מחלק גם את וגם את , ולכן הוא חייב לחלק גם את , בסתירה להנחה שהם זרים). באותה מידה לא יתכן שיחלק את , ולכן מחלק את כלומר הוא מחלק ראשוני משותף גם של ושל ולכן לפי הנחת האינדוקציה .*

*כלומר אם היה ל- ול- איזשהו מחלק ראשוני משותף, אז הוא בהכרח שווה ל. ולכן השלהם הוא או 1 או איזשהי חזקה של . נשאר לנו להראות שלא יתכן שהמתחלק ב-4. בשביל זה מספיק לשים לב שלכל שלם אי שלילי, המספר הוא סכום ריבועים, וסכום ריבועים מתחלק ב-4 רק כאשר שני הריבועים מתחלקים ב4. אבל אז זה היה אומר ששניהם זוגיים, בסתירה להנחה שהם זרים.*

*עד כאן ההוכחה של טענת העזר*

נחזור לטענה המקורית: נניח בשלילה שקיימים שלמים חיוביים **שונים** (לאו דווקא זרים) המקיימים את תנאי השאלה. נסמן ב את המחלק המשותף הגדול ביותר של . נניח:  *ו- כאשר זרים. כעת לכל , אם*  מתחלק ב- , אז גם מתחלק ב- . ולכן מתחלק ב- .

כלומר מתחלק ב-,

ולכן מתחלק ב- .

*אבל זר ל- (אם היה להם מחלק ראשוני משותף אז הוא היה מחלק גם את בסתירה להנחה ש זרים), וגם זר ל- מאותה סיבה, ולכן זה אומר ש: מתחלק ב- .*

*אבל מטענת העזר, ה של ושל , הוא לכל היותר . ולכן יש שני מקרים:*

*אם השלהם הוא 1, נסיק ש מתחלק לגמרי ב- .*

*ואם השלהם הוא 2, נסיק ש מתחלק ב- .*

*כלומר בכל מקרה מתקיים:*

*אבל אם ה-המקוריים היו* ***שונים****, אז בהכרח* ***לא שניהם*** *1, כלומר אחד מהם בוודאות גדול מ1. ולכן לא ייתכן ש קורה עבור אינסוף –ים.*

*כנדרש.*