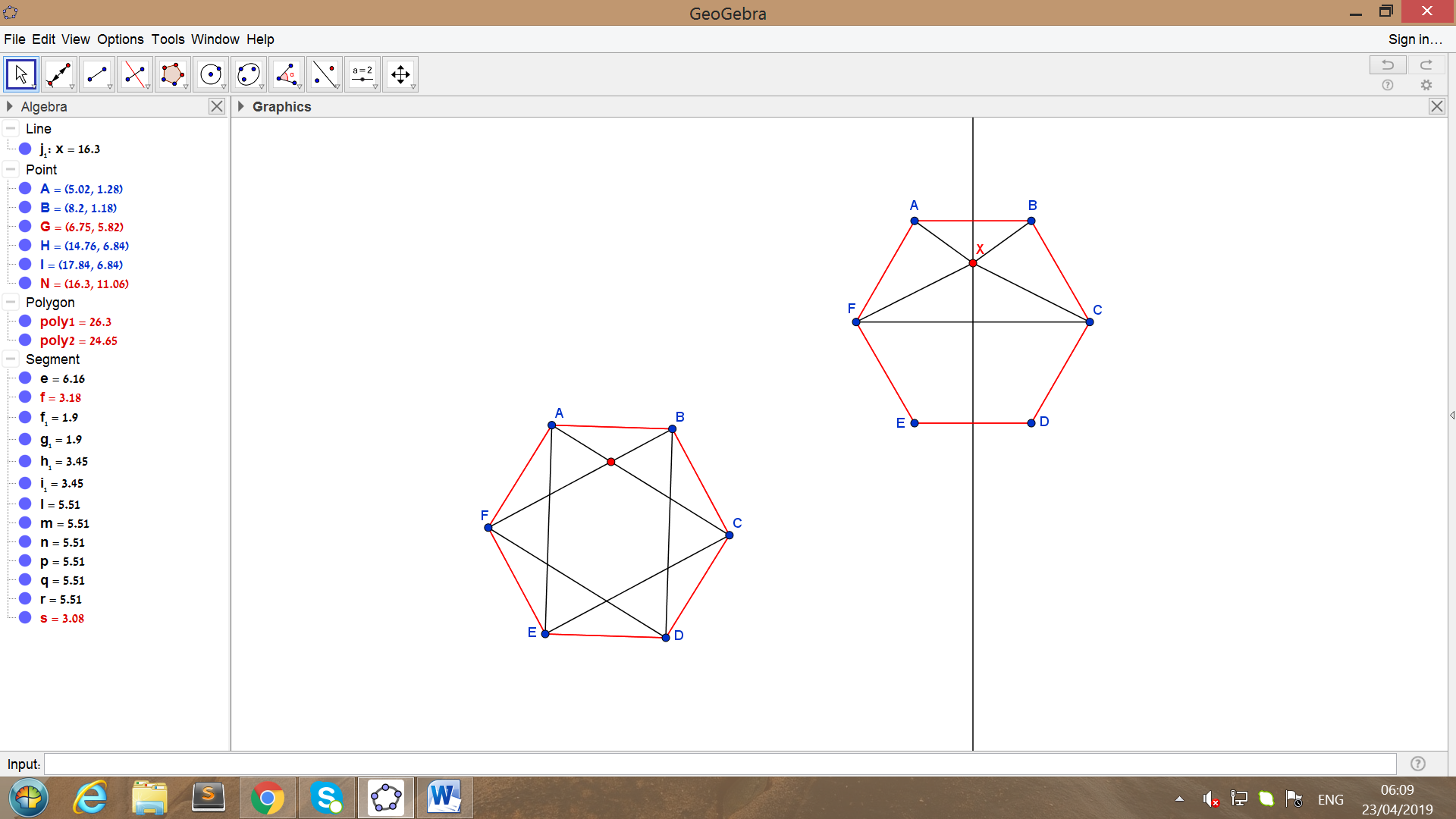
1. בתוך משושה משוכלל נבחרה נקודה כלשהי. המרחקים של הנקודה משלושה קודקודים סמוכים כלשהם הם 1,1,2 בסדר הזה. מהו אורך הצלע של המשושה?

**תשובה**:

**פתרון** **ראשון**:

תהי נקודה בתוך המשושה, המקיימת את התכונה הנדרשת ביחס לקדקודים :



נשים לב שזה אומר ש נמצאת על האנך האמצעי ל. ישר זה הוא גם האנך האמצעי ל*, ולכן מתקיים: . בנוסף – מכיוון שהאלכסון הארוך במשושה משוכלל גדול פי 2 מאורך הצלע שלו, נקבל ש:*

*ולכן המשולשים ו- דומים, ולכן יש לשניהם את אותה זווית ראש בקדקוד .*

*וזה משאיר ל-בדיוק שתי אפשרויות: או שהיא נמצאת על חיתוך האלכסונים ו- , או שהיא נמצאת על החיתוך של המשכי הצלעות ו-* .

האפשרות השנייה נפסלת בגלל שנתון שבתוך המשושה.

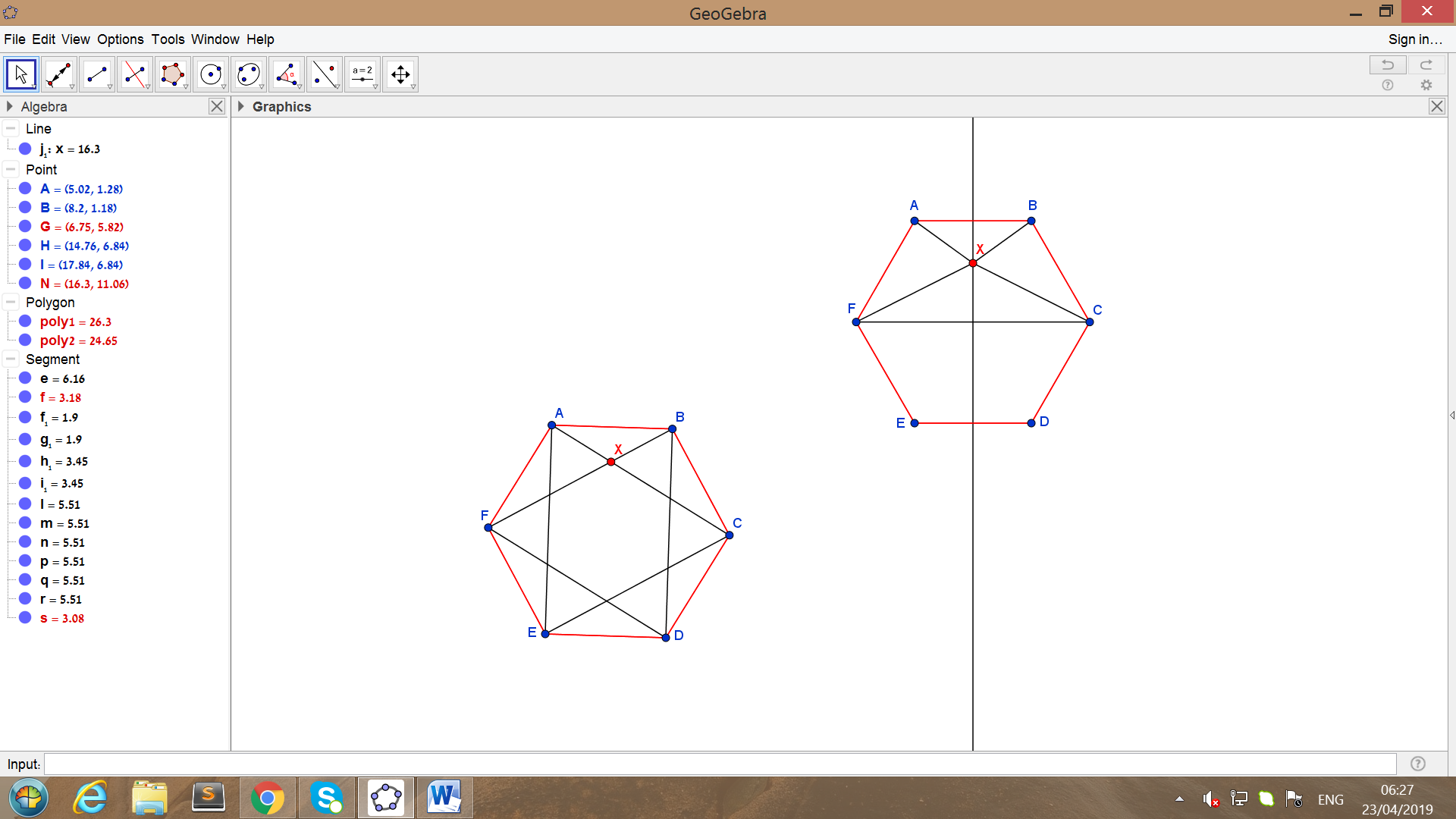
נשאר לשים לב שהמשולש , הוא משולש שזוויתיו הן 30, 60, 90.

ולכן היחס בין הניצבים שלו הוא .

כנדרש.

**פתרון שני:**

במקום לחשב את אורך הצלע של המשושה, נעשה "העמדת העגלה לפני הסוס":

נשאל את עצמנו האם אנחנו מסוגלים לבנות נקודה בתוך המשושה, שהיחסים בין המרחקים שלה לשלושה קדקודים סמוכים יהיו 1:1:2

מסתבר שזה די קל. אם נחסום מגן דוד בתוך המשושה – אז כל אחד מקדקודי המשושה הפנימי של המגן דוד (למשל הקדקוד שבתמונה), יקיים את התנאי ביחס לשלושה קדקודים סמוכים של המשושה החיצוני: המרחק של מ- Aזהה למרחק שלו מ-B וקטן פי 2 מהמרחק שלו מ-C.

כעת נשים לב שעבור השלישייה A,B,C קיימת רק נקודה אחת עם יחס כזה בין המרחקים, שנמצאת בתוך המשושה. מכיוון שכל נקודה כזאת מצד אחד צריכה להימצא על האנך האמצעי ל-AB, ומצד שני להיות על מעגל אפולוניוס של הקטע BC עם יחס 2 בין המרחקים, (המקום הגאומטרי המוגדר על ידי ). הישר והמעגל נחתכים בשתי נקודות – שאחת מהן היא , והשנייה היא חיתוך המשכי הצלעות BC ו-AF. ולכן בתוך המשושה יש רק נקודה אחת שמתאימה לשלישייה A,B,C

מכאן ההמשך זהה כמו בפתרון הקודם:

נשאר לשים לב שהמשולש , הוא משולש שזוויתיו הן 30, 60, 90.

ולכן היחס בין הניצבים שלו הוא .

כנדרש.