1. בתוך משושה משוכלל נבחרה נקודה כלשהי. המרחקים של הנקודה משלושה קודקודים סמוכים כלשהם הם 1,1,2 בסדר הזה. מהו אורך הצלע של המשושה?

**תשובה**: $\sqrt{3}$

**פתרון** **ראשון**:

תהי $X$ נקודה בתוך המשושה, המקיימת את התכונה הנדרשת ביחס לקדקודים $A,B,C$ :

$$XA=XB=\frac{XC}{2}$$



נשים לב שזה אומר ש$X$ נמצאת על האנך האמצעי ל$AB$. ישר זה הוא גם האנך האמצעי ל$FC$*, ולכן מתקיים:* $XC=XF$*. בנוסף – מכיוון שהאלכסון הארוך במשושה משוכלל גדול פי 2 מאורך הצלע שלו, נקבל ש:*

$$2=\frac{XC}{XB}=\frac{XF}{XA}=\frac{FC}{AB}$$

*ולכן המשולשים* $∆ABX$ *ו-* $∆FCX$ *דומים, ולכן יש לשניהם את אותה זווית ראש בקדקוד* $X$*.*

*וזה משאיר ל-*$ X$*בדיוק שתי אפשרויות: או שהיא נמצאת על חיתוך האלכסונים* $AC$ *ו-* $BF$*, או שהיא נמצאת על החיתוך של המשכי הצלעות* $BC$ *ו-* $AF$.

האפשרות השנייה נפסלת בגלל שנתון ש$ X$בתוך המשושה.

נשאר לשים לב שהמשולש $∆CBX$, הוא משולש שזוויתיו הן 30, 60, 90.

ולכן היחס בין הניצבים שלו הוא $\sqrt{3}$.

כנדרש.$∎$

**פתרון שני:**

במקום לחשב את אורך הצלע של המשושה, נעשה "העמדת העגלה לפני הסוס":

נשאל את עצמנו האם אנחנו מסוגלים לבנות נקודה בתוך המשושה, שהיחסים בין המרחקים שלה לשלושה קדקודים סמוכים יהיו 1:1:2

מסתבר שזה די קל. אם נחסום מגן דוד בתוך המשושה – אז כל אחד מקדקודי המשושה הפנימי של המגן דוד (למשל הקדקוד $X$ שבתמונה), יקיים את התנאי ביחס לשלושה קדקודים סמוכים של המשושה החיצוני: המרחק של $X$ מ- Aזהה למרחק שלו מ-B וקטן פי 2 מהמרחק שלו מ-C.

כעת נשים לב שעבור השלישייה A,B,C קיימת רק נקודה אחת עם יחס כזה בין המרחקים, שנמצאת בתוך המשושה. מכיוון שכל נקודה כזאת מצד אחד צריכה להימצא על האנך האמצעי ל-AB, ומצד שני להיות על מעגל אפולוניוס של הקטע BC עם יחס 2 בין המרחקים, (המקום הגאומטרי המוגדר על ידי $\frac{XC}{XB}=2$ ). הישר והמעגל נחתכים בשתי נקודות – שאחת מהן היא $X$, והשנייה היא חיתוך המשכי הצלעות BC ו-AF. ולכן בתוך המשושה יש רק נקודה אחת שמתאימה לשלישייה A,B,C

מכאן ההמשך זהה כמו בפתרון הקודם:

נשאר לשים לב שהמשולש $∆CBX$, הוא משולש שזוויתיו הן 30, 60, 90.

ולכן היחס בין הניצבים שלו הוא $\sqrt{3}$.

כנדרש.$∎$