**4.** לנטע יש 5 מטבעות זהים למראה, ששלושה מהם אמיתיים וזהים במשקל, ושניים מזויפים: אחד קל יותר ממטבע אמיתי, והשני כבד יותר ממטבע אמיתי באותה כמות. האם אפשר באמצעות שלוש שקילות במאזני כף להבין אילו שני מטבעות הם המזויפים, וגם איזה מהם קל יותר ואיזה כבד יותר?

**תשובה.** כן.

**פתרון.** נמספר את המטבעות 1,2,3,4,5, ונסמן את משקליהם ב-$w\_{1},w\_{2},w\_{3},w\_{4},w\_{5}$ בהתאמה.

**טענת עזר.** שני מטבעות הם שווים במשקל אם ורק אם שניהם אמיתיים.

**הוכחה.** יש מטבע יחיד קל, מטבע יחיד כבד, ושלושה מטבעות אמיתיים. הקבוצה היחידה ממנה ניתן לבחור שני מטבעות שווי משקל היא קבוצת האמיתיים. בכיוון השני, כמובן שאם שני מטבעות הם אמיתיים אז הם שווי משקל.

בשקילה הראשונה נשווה בין המטבעות 1,2, ובשקילה השנייה נשווה בין המטבעות 3,4. נחלק למקרים על פי תוצאות השקילות:

**אם** $w\_{1}=w\_{2}$**,** אז שניהם אמיתיים מטענת העזר. נשווה את מטבע 1 למטבע 5, וכך נגלה את סוגו של מטבע 5 (אם הוא קל יותר מ-1 אז הוא מזויף קל, אם הם שווי משקל הוא אמיתי, ואם הוא כבד יותר מ-1 אז הוא מזויף כבד). כעת אנו יודעים את הסוגים של 1,2,5, ולכן ניתן להסיק מה הסוגים של 3,4 עד כדי סדר. אך ההשוואה שביצענו בין 3 ו-4 תגיד לנו מי מהם הוא מאיזה סוג.

**אם** $w\_{3}=w\_{4}$**,** אז נסיים באותו אופן.

**אם** $w\_{1}\ne w\_{2},w\_{3}\ne w\_{4}$**,** נניח ללא הגבלת הכלליות כי $w\_{1}<w\_{2},w\_{3}<w\_{4}$. מטענת העזר, בכל אחד מהזוגות 1,2 ו-3,4 יש מטבע מזויף. אך יש 2 מטבעות מזויפים סך הכול, ולכן המטבע 5 אמיתי וגם בכל אחד מהזוגות יש מטבע אמיתי אחד ומזויף אחד. לזוג 1,2 יש כעת שתי אופציות:

* 1 קל, 2 אמיתי
* 1 אמיתי, 2 כבד

נשווה את מטבע 1 ומטבע 5. כיוון שמטבע 5 אמיתי, אנו נגלה מהו הסוג של מטבע 1 (קל או אמיתי) ובהתאם נגלה מהו הסוג של מטבע 2 (אמיתי או כבד). כעת אנו שוב יודעים את הסוגים של 1,2,5, ולכן נסיק מה הסוגים של 3,4 עד כדי סדר. מההשוואה שביצענו בין 3 ו-4 נדע מי מהם הוא מאיזה סוג.