**3.** נתונים 21 מספרים שכולם שונים מ-0. לכל זוג מספרים מחשבים את סכומם ואת מכפלתם. מסתבר כי חצי מהסכומים חיוביים וחצי – שליליים. מה הוא המספר המקסימלי האפשרי של מכפלות חיוביות?

תשובה.120.

**פתרון.** סה"כ יש  זוגות. אם אומרים לנו שחצי מהסכומים חיוביים, אז יש 105 סכומים חיוביים. אם יש  מספרים חיוביים, אז לפחות  מהסכומים בהכרח חיוביים. לכן אם יש 15 מספרים חיוביים אז יש לפחות  סכומים חיוביים, שזה עוד סביר, אבל אם יש 16 מספרים חיוביים אז זה כבר יותר מדי. באופן דומה, אם יש 15 מספרים שליליים, זה עוד סביר, אבל אם יש 16 מספרים שליליים זה יותר מדי.

אם יש מספר מקסימלי של מכפלות חיוביות, זאת אומרת שיש מספר מינימלי של מכפלות שליליות. מספר המכפלות השליליות זה , כאשר  זה מספר המספרים החיוביים מבין המספרים הנתונים. גרף הפונקציה  זו פרבולה בוכה, הפונקציה מינימלית בקצוות התחום. במקרה שלנו בשני הקצוות מקבלים  מכפלות שליליות לפחות, לכן 120 מכפלות שליליות לכל היותר.

הנקודה שצריך לבדוק עדיין למען שלמו ההוכחה היא האם 120 הו בר השגה. בשביל זה צריך שיתקיים שיש למשל 15 מספרים חיוביים, 6 מספרים שליליים ו-105 סכומים חיוביים, כלומר שכל סכום של מספר חיובי ושלילי יהיה שלילי. מספיק לקחת 6 מספרים שליליים שגדולים ערך המוחל מהמספרים החיוביים, ונקבל את הדוגמה.