**5.** מאה דובים מצאו אוכמניות ביער. הדובי הצעיר ביותר מצא רק אוכמנייה אחת, הדובי הקצת יותר מבוגר – 2 אוכמניות, הדובי הבא – 4, וכן הלאה, עד הדוב המבוגר ביותר שמצא  אוכמניות. השועל הציע לדובים לחלק את האוכמניות בינם "בצורה הוגנת". הוא יכול לגשת לשני דובים, לחלק את כל האוכמניות שיש להם שווה בשווה בינם, ואם יש אוכמנייה אחת מיותרת, הוא אוכל אותה בעצמו. את הפעולה הזו הוא ממשיך לבצע עד שלכל הדובים יש מספר שווה של אוכמניות. מהו המספר הקטן ביותר של אוכמניות שהשועל יכול להשאיר לדובים?

***תשובה****: 100 (אוכמנייה אחת לכל דוב).*

***הוכחה****: קודם כל, נראה כי השועל אינו יכול להשאיר פחות ממאה אוכמניות. בסוף התהליך, לכל הדובים צריך להישאר מספר שווה של אוכמניות. אם נשארו פחות מ-100 אוכמניות, אז לכל הדובים יש 0 אוכמניות. אבל השועל לא יכול להגיע למצב בו לדוב כלשהו אין אוכמניות: אם בשלב כלשהו לכל דוב הייתה לפחות אוכמניה אחת, אז אחרי הפעולה של השועל, לכל דוב עדיין תהיה לפחות אוכמניה אחת.*

*לכן השועל ישאיר לפחות מאה אוכמניות. נראה כי הוא אכן יכול להשאיר מאה אוכמניות בלבד:*

*נסדר את הדובים בסדר עולה לפי כמות האוכמניות:* 1*,*2*,*4*,*8*,….*

*נראה באינדוקציה כי השועל יכול להביא את n הדובים הראשונים למצב בו לכל אחד מהם יש אוכמניה אחת.*

*טענה: אם ל-*(*n-*1) *דובים יש אוכמניה אחת לכל אחד, ולדב נוסף יש* $2^{n-1}$ *אוכמניות, אז ע"י פעולת החילוק של השועל ניתן להגיע למצב בו לכל n הדובים האלו יש אוכמניה אחת בלבד (לכל דוב).*

*אם השועל מתקדם לפי טענה זו, בסוף התהליך לכל אחד מה-100 דובים תישאר אוכמנייה אחת בלבד.*

*הוכחת הטענה:*

*בסיס האינדוקציה: n=*1*. אין מה להוכיח.*

*דוגמא: n=*2*. זה המצב ההתחלתי: יש דוב עם אוכמנייה אחת ודוב עם 2 אוכמניות. השועל מפעיל את פעולת החילוק שלו עליהם, וכל אחד מהדובים נשאר עם אוכמנייה אחת.*

*צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה ל-n כלשהו. נראה כי היא נכונה גם עבור n+*1 *דובים.*

*השועל לוקח דוב אחד בעל אוכמניה אחת (נקרא לו יוסי), ואת הדוב בעל* $2^{n}$ *אוכמניות (נקרא לו בני), ומבצע עליהם את פעולת החילוק שלו. בסכום יש להם* $2^{n}+1$ *אוכמניות. אחרי פעולת החילוק של השועל לכל אחד מהם יהיו* $2^{n-1}$ *אוכמניות. ניקח את הדב משה ו-(n-*1*) דובים אחרים, בעלי אוכמנייה אחת כל אחד. לפי הנחת האינדוקציה, השועל יכול להביא אותם למצב בו לכל אחד מהם (כולל משה!) יש אוכמניה אחת. אחר כך הוא לוקח את בני ו-(n-*1*) דובים אחרים, בעלי אוכמנייה אחת כל אחד. הוא שוב מפעיל את הנחת האינדוקציה ומביא גם אותם למצב בו לכל אחד מהם יש אוכמנייה אחת. עכשיו לכל אחד מה- n+*1 *דובים יש אוכמניה אחת, והטענה הוכחה.*

***אזהרה****: השועל אכל* $1+2+…+2^{99}-100=2^{100}-101 ≈10^{30}$ *אוכמניות. זה הרבה מאוד (תשוו: כמות גרגירי חול בכל כדור הארץ היא כנראה בסביבות* $ 10^{21}$*, והמספר שלנו גדול פי מיליארד). סביר להניח כי לשועל תכאב הבטן בעקבות החמדנות שלו.*