**3.** על מעגל נתונות 100 נקודות. נקודות אלו ממוספרות מ-1 עד 100 בסדר מסוים.

א. (2 נקודות) הוכיחו כי לכל מספור ניתן לחלק את הנקודות לזוגות כך שסכום המספרים בכל זוג יהיה אי-זוגי, והקטעים המחברים את הנקודות בכל זוג לא יחתכו זה עם זה.

ב (2 נקודות) האם לכל מספור ניתן לחלק את הנקודות לזוגות כך שסכום המספרים בכל זוג יהיה זוגי, והקטעים המחברים את הנקודות בכל זוג לא יחתכו זה עם זה?

**א. פתרון ראשון.** נחלק את הנקודות המסומנות באופן כלשהו לזוגות (בינתיים מתעלמים מחיתוכים), כך שבכל זוג יהיה מספר אחד זוגי והשני אי-זוגי (לכן הסכום אי-זוגי). נחבר את הזוגות בקטעים. למשל, נחבר 1 ל-100, 2 ל-99, 3 ל-98, וכו' (50 מתחבר ל-51). עכשיו נבצע תהליך הבא: בכל שלב, אנו בוחרים שני קטעים שנחתכים ומחליפים אותם בשני קטעים אחרים על אותם קודקודים. כלומר, אם הקטע הראשון חיבר בין המספרים a, b, והשני בין המספרים c,d, כאשר a, c זוגיים ו‑ b, d אי-זוגיים, נחליף קטעים אלו בקטעים [a, d] ו-[b,c].

הקטעים החדשים לא נחתכים, והמספר הכולל של החיתוכים בין הקטעים יורד (וודאו כי אתם מבינים מדוע!).מכאן שאחרי מספר מסוים של צעדים, מספר החיתוכים הכולל יהיה 0, ונקבל את החלוקה הנדרשת.

**פתרון שני.** נעבור על המעגל, עד שנראה ברצף מספר זוגי ואי-זוגי. נחבר אותם בקו. הקו הזה לא יכול להפריע לאף קו שנצייר בהמשך. לכן אפשר להתעלם מזוג נקודות זה. נמשיך באותו אופן, ולאחר 50 צעדים כאלה נקבל 50 קטעים שרצינו.

**ב. תשובה**: לא.

**פתרון**: נתבונן במספור בו הנקודות ממוספרות מ-1 עד 100 לפי הסדר (למשל בכיוון השעון). אנו טוענים כי במקרה זה לא ייתכן זיווג כנדרש.

נניח בשלילה כי זיווג כזה קיים. אז לכל קטע שני הקצוות הם בעלי זוגיות זהה: או ששניהם זוגיים, או ששניהם אי-זוגיים. נתבונן בקטע כלשהו: [a, b], בכל צד שלו יש מספר אי-זוגי של נקודות, לכן אי‑אפשר לזווג אותם על ידי קטעים שלא נחתכים.