**2.** על ישר מסומנות 100 נקודות, ונקודה נוספת מסומנת מחוץ לישר זה. נתבונן בכל המשולשים שקדקודיהם בנקודות המסומנות. מהו המספר המרבי של משולשים מבין המשולשים הללו שיכולים להיות שווי שוקיים?

תשובה. 150.

**פתרון.** לישר שעליו מסומנות 100 נקודות נקרא , לנקודה מסומנת מחוץ ל- נקרא P. עבור כל משולש שווה PXY של נקודות מסומנות שוקיים  הוא שוק או בסיס. אם  הוא בסיס, אז PX=PY, אבל כל מעגל עם מרכז ב-P חותך את  לכל היותר פעמיים, לכן כל נקודה X יכולה להשתתף רק בזוג אחד עם עוד נקודה Y. מתוך 100 נקודות אפשר ליצור לכל היותר 50 זוגות זרים, לכן יש עד 50 משולשים מסוג זה. הסוג האחר הוא כאשר  הוא שוק ולא בסיס. במקרה כזה הבסיס כולל את P. אם PX הוא בסיס, אז Y נמצאת על האנך האמצעי של PX; אנך זה פוגש את  פעם אחת לכל היותר, לכן כל קטע בין P לנקודה מסומנת נוספת יכול להיות בסיס רק למשולש אחד. לכן יש לכל היותר 100 משולשים מסוג זה. בסה"כ לא יכול להיות מעל  משולשים.

נסביר כיצד לבנות דוגמה ל-150 משולשים. נתחיל ממשולש  כאשר  והזוויות האחרות הן . האנך האמצעי ל- פוגש את  בנקודה , והאנך האמצעי ל- פוגש את  בנקודה . נקבל שמשולש  גם שווה-שוקיים: , ולכן . באופן דומה גם  שווה-שוקיים. מחשבון זוויות פשוט יוצא גם ש- שווה שוקיים. באופן דומה גם  שווה שוקיים. גם  שווה-שוקיים מסימטריה, ולכן כל המשולשים שנוצרו עד עכשיו שווי-שוקיים (הגדרנו 4 נקודות ונוצרו 6 משולשים).

נגדיר נקודות נוספות באינדוקציה. האנך האמצעי ל- פוגש את  בנקודה , והאנך האמצעי ל‑ פוגש את  בנקודה , לכל  מ-2 עד 49. כל פעם מוסיפים 2 נקודות ו-3 משולשים שווי-שוקיים: , , ו-. לכן בכל שלב יש פי 1.5 משולשים מאשר נקודות, וכאשר נגיע ל-100 נקודות נגיע גם ל-150 משולשים.