**4.** חברה רושמת את הוצאותיה בשקלים לפי מאה סעיפי תקציב, ומקבלת רשימה של מאה מספרים – לכל מספר יש לכל היותר שתי ספרות אחרי הנקודה. כל רואה חשבון מקבל העתק של הרשימה ומוצא באופן מקורב את סכום ההוצאות כדלקמן: הוא בוחר שני מספרים מהרשימה, מחבר אותם, מוחק את הספרות שאחרי הנקודה (אם הן קיימות), ורושם את התוצאה במקום שני המספרים שהיו. על הרשימה החדשה הוא מבצע את אותה הפעולה, וכך הלאה, עד שנשאר מספר שלם יחיד. התברר כי בסוף כל רואי החשבון קיבלו תוצאות שונות. מהו המספר המרבי של רואי חשבון שיכולים להיות מועסקים בחברה?

**תשובה**: 51.

**הפתרון מורכב משני חלקים (שניהם הכרחיים)**: דוגמא למצב בו מועסקים 51 רואי חשבון, והוכחה שלא ניתן להעסיק יותר מ-51 רואי חשבון.

**דוגמא**: הרשימה המקורית הכילה מספרים 0.2, 0.2, 0.9, 0.9, ..., 0.9 (0.9 מופיע 98 פעמים)

אנו טוענים כי רואי חשבון יכולים לקבל כל סכום מ-0 עד 50, ולכן ייתכנו 51 רואי חשבון.

על מנת לקבל סכום 0, *רואה חשבון מחבר 0.2, 0.2 ומקבל 0, לאחר מכן הוא מוסיף את התוצאה הזו ל-0.9. הוא מקבל שוב 0 ומוסיף תוצאה זו ל-0.9, וכן האלה. בכל שלב הוא מחבר תוצאה משלב קודם (אפס) עם 0.9 ומקבל 0. לכן בסוף התוצאה שלו תהיה 0.*

*על מנת לקבל סכום , רואה חשבון מחבר  זוגות של מספרים שבורים שהם לא , כלומר כל זוג כזה הוא  או . כך הוא מקבל  אחדים. הוא מחבר את כולם ומקבל . אחר כך הוא מחבר את  לכל המספרים שנשארו לפי התור, ומקבל  כל פעם. שיטה זאת תעבוד רק ל-, מכיוון שיכולים להיות לא יותר מ-50 זוגות.*

***הוכחה שלא ניתן להעסיק יותר מ-51 רואי חשבון:***

נסמן ב- את סכום הערכים השלמים של המספרים ברשימה המקורית *(הערך השלם*  של מספר  הוא המספר השלם הגדול ביותר שלא עולה על ). אנחנו טוענים שהתוצאה הסופית היא לפחות ולכל היותר . בטווח זה יש רק 51 מספרים שלמים, לכן מכאן יהיה ברור שיש לכל היותר 51 רואי חשבון.

נשים לב, שבחיבור של סכומים A ו-B סכום החלקים השלמים אינו יורד, ועולה רק עם סכום החלקים השבורים *של* A ושל B גדול מ-1, אז סכום החלקים השלמים עולה ב-1. דבר כזה לא יכול לקרות אם A או B התקבל מחיבור של שני מספרים שהיו קודם, כי אז מעגלים את המספר למספר שלם. לכן כל פעם שסכום הערכים השלמים הוגדל ב-1, חיברו בעצם שני מספרים מקוריים, ומכיוון שבמקור היו 100 מספרים ניתן לעשות זאת רק 50 פעם.