**5.** במדינה 100 ערים. כל שתי ערים מחוברות על ידי טיסות ישירות (בשני הכיוונים). כל טיסה עולה מספר חיובי (לא בהכרח שלם) של זוזים. לכל שתי ערים A ו-B מחיר הטיסה מ‑A ל‑B זהה למחיר הטיסה מ-B ל-A. מחיר הטיסה הממוצע הוא זוז אחד. תייר רוצה לצאת לטיול מעיר מולדתו (שהיא אחת מ-100 הערים). הוא בוחר  ערים אחרות, ומסלול טיסה המתחיל ומסתיים בעיר מולדתו ועובר בכל אחת מהערים שבחר פעם אחת בדיוק. האם הוא תמיד יכול לבחור מסלול כזה, כך שסכום מחירי הטיסות יהיה לכל היותר  זוזים, אם:

א. ?

ב. ?

**פתרון. א.** לא בהכרח. למשל, נניח כי יש עיר (נקרא לה "מוסקבה") שהמחיר של כל טיסה ממנה ואליה הוא 50, ונניח כי שאר הטיסות הן חינם (מחיר 0). מצב זה מקיים את תנאי הבעיה, ומטייל אינו יכול לטוס במסלול שמתחיל ונגמר במוסקבה ועולה פחות מ-100.

**ב.** בהכרח. נתבונן בכל המסלולים באורך 100 במדינה הזו, אשר לא עוברים פעמיים באותה עיר. על כל מסלול כנ"ל ניתן להגיד כי הוא מתחיל ומסתיים בעיר מולדתו של התייר. אנו רוצים להגיד כי מבין המסלולים הנ"ל קיים מסלול עם עלות לכל היותר 100.

יש !99 מסלולים כאלו. נניח בשלילה כי עלות של כל מסלול כזה היא יותר מ-100. נסמן ב-S את סכום העלויות של המסלולים האלו. עפ"י ההנחה שלנו, S גדול מ- !100.

עכשיו נחשב באופן שונה את סכום עלויות המסלולים הנ"ל: כל טיסה בין שתי ערים כלשהן תהווה חלק מ-!98 מסלולים כנ"ל. לכן

סכום עלויות הטיסות בין כל זוגות הערים

× 98! = S

כמו כן,

סכום עלויות הטיסות בין כל זוגות הערים

ממוצע עלות הטיסה בין הערים

=

מספר זוגות ערים (עם חשיבות לסדר!)

×

לכן סכום עלויות הטיסות בין כל זוגות הערים הוא 100×99. לכן S הוא !100. סתירה.