**7.** יעל בוחרת מספרים שלמים חיוביים  ו- כך ש-. את המספר  היא רושמת על הלוח. לאחר מכן, בכל שלב יעל מבצעת את הפעולה הבאה: היא מחלקת את  עם שארית במספר האחרון שרשום על הלוח, ואת השארית שמתקבלת היא רושמת על הלוח. כאשר היא רושמת את המספר 0, היא עוצרת. האם יתכן שסכום כל המספרים שנרשמו על הלוח גדול יותר מאשר ?

**תשובה**: כן

**פתרון**. נגדיר סדרה של מספרים:









. . .



. . .



מהגדרה זאת ניתן להסיק שתי תכונות של הסדרה:

**תכונה 1.** .

**תכונה 2.** , לכל , בפרט .

תכונה 1 מתקבלת מחיבור של משוואות. בשביל להוכיח תכונה 2 נשים לב, כי כל מספר בסדרה מתקבל מסכום ארוך של מחוברים עם סימנים מתחלפים, וכל מחובר גדול מהמחובר הבא, לכן אם נשאיר רק את המחובר הראשון  נקבל מספר גדול יותר, ואם נשאיר רק את המחוברים ראשון ושני נקבל מספר  והוא קטן יותר מהמספר עצמו.

החיסרון של הסדרה  הוא שאלה מספרים רציונאליים ולא שלמים. לכן נגדיר בנוסף:  ונגדיר . אז לסדרה  יש גם שתי תכונות שמתקבלות מהתכונות של הסדרה :

**תכונה 1.** .

**תכונה 2.** , לכל , כמסכנה .

כמסכנה משתי התכונות, אם יעל תתחיל את המשחק שנתון בשאלה מ- ו-  אז שארית החלוקה של  ב- יהיה לפחות  כלומר היא בדיוק תקבל מספרים של הסדרה  לפי הסדר.

מתכונה 2 ניתן להסיק כי  אז מספיק להראות שעבור  מסוים . בשביל זה ניקח . נשים לב שהסכום מ- של  הוא סכום של  מחוברים שכולם לפחות , כלומר סכום זה הוא לפחות . מכיוון שבין 1 ל- יש 200 חזקות של 2, מתקבל כי .