**6.** לאריק יש חפיסה של 36 קלפים (4 צורות, 9 קלפים מכל צורה). הוא מעביר לבנץ חצי מהקלפים לפי בחירתו, ומשאיר את החצי השני אצלו. לאחר מכן, השחקנים מניחים בתורות קלף אחד בכל פעם על השולחן לפי בחירתם עם הפנים כלפי מעלה, כאשר אריק מתחיל. אם בתגובה למהלך של אריק, בנץ מניח קלף עם אותה צורה או עם אותו ערך, הוא מקבל נקודה. מהו המספר הנקודות המרבי שבנץ יכול להבטיח לעצמו?

תשובה: 15

**פתרון**. בעצם, אפשר לנסח את המשחק ככה: אריק מחלק את הקלפים לשתי מחלקות (18 בכל מחלקה) ובנץ מחלק אותם לזוגות, בכל זוג יש קלף ממחלקה ראשונה וקלף ממחלקה שנייה, ועל כל זוג של אותה צורה או אותו ערך בנץ מרוויח נקודה (טכנית, אריק גם קובע את סדר הזוגות אבל זה לא משנה כי בנץ קובע את הזוגות).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

אנחנו נחשוב על הקלפים בתור טבלה עם 4 שורות ו-9 עמודות, עמודות הן ערכים ושורות הן צורות.

אם אריק יבחר במחלק ראשונה את כל הקלפים מ-3 צורות בלבד ומ-6 ערכים בלבד, שזה בדיוק 18 קלפיות, אז יהיו 3 קלפים במחלקה השנייה שבזוג שלהם אין סיכוי להרוויח נקודה. לכן אין תקווה לבנץ לקבל מעל 15 נקודות.

נותר להוכיח שבנץ תמיד יוכל להרוויח לפחות 15 נקודות, במילים אחרות שיוכל לוותר על 3 נקודות לכל היותר. נניח שאריק חילק את משבצות הטבלה לשתי מחלקות של 18.

נחלק את העמודות של הטבלה ל-5 סוגים לפי כמות של משבצות במחלקה ראשונה ובמחלקה שנייה: 0 + 4, 1 + 3, 2 + 2, 3 + 1, 4 + 0.

אם יש עמודה מסוג 0 + 4 ועמודה מסוג 4 + 0, אז אפשר לקזז אותם, כלומר לחלק את המשבצות של שתי העמודות לזוגות שעל כל אחת מהן בנץ יקבל נקודה, פשוט לפי שורות.

אם יש עמודה מסוג 2 + 2, אז אפשר לקזז גם אותה, כלומר לחלק אותה לשתי זוגות של משבצות במחלקות שונות, ובכל זוג לקבל נקודה.

אם יש עמודה מסוג 1 + 3 ועמודה מסוג 3 + 1, אז גם אפשר לקזז אותן. יש לפחות שתי שורות שבהן בעמודה ראשונה יש משבצת במחלקה שנייה ובעמודה שנייה יש משבצת במחלקה ראשונה, זה ייתן לנו כבר שתי זוגות; נשארו שתי משבצות בכל עמודה במחלקות שונות, זה נותן עוד שתי זוגות.

לאחר כל הקיזוזים מסוג זה, יישארו לנו פחות עמודות; לא יישארו עמודות מהסוג 2 + 2 ולא יישארו סוגים סימטריים. כלומר יתכן שיישארו עמודות מהסוג 1 + 3 יחד עם עמודות מהסוג 4 + 0, אבל לא עם עמודות מהסוג 3 + 1.

נשים לב שבעמודות מהסוג 1 + 3 יש שתי משבצות יותר מהמחלקה השנייה, אז אם נשארו K עמודות כאלה ולא נשארו עמודות מהסוג 3 + 1 אז חייבות להיות עמודות מהסוג 4 + 0. במקרה זה אסור שישארו עמודות מהסוג 0 + 4. בכל עמודה מהסוג 4 + 0 יש 4 משבצות יותר מהמחלקה הראשונה, לכן אם יש M עמודות כאלה ו-K עמודות שהן מהסוג 1 + 3 אז M = K2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | **6** | 1 |
| 2 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 5 |
| **6** | 4 | 5 |

באופן דומה יש מצב שיישארו עמודות מהסוג 3 + 1 ועמודות 0 + 4, כאשר גם כאן יש פי 2 עמודות מהסוג 3 + 1 מאשר עמודות 0 + 4. כמובן יש גם מצב שהכול התקזז, אבל במקרה זה קיבלנו 18 נקודות.

נשתדל לקזז 3 עמודות, שתיים מסוג 3 + 1 ואחת מסוג 0 + 4 אז אפשר לחלק אותן לזוגות כמו בציור, ואז מפסידים רק נקודה אחת על שלישיית משבצות. בדומה אם מדובר על שלישיית עמודות מסוגים הפוכים. אבל מראש היו 9 עמודות, אז לאחר קיזוזים נשארות 9 עמודות לכל היותר, וזה 3 שלישיות לכל היותר, ואם על כל שלישייה נאבד נקודה נאבד 3 נקודות לכל היותר.