**2.** שלושה גיבורים: יואב, אבישי ועשהאל נלחמים בדרקון. בכל מכה שלו יואב כורת לדרקון חצי מהראשים ועוד ראש, אבישי בכל מכה כורת לו שליש מהראשים ועוד שני ראשים, ועשהאל בכל מכה מוריד לו רבע מהראשים ועוד שלושה ראשים. הגיבורים מכים בזה אחר זה בסדר שהם בוחרים, כאשר בכל מכה כורתים מספר שלם של ראשים. אם אף גיבור לא יכול להכות (כי זה יצור מספר לא שלם של ראשים), הדרקון אוכל את שלושתם. האם הגיבורים יצליחו לכרות את כל ראשי הדרקון שבהתחלה יש לו !41 ראשים?

תשובה: כן.

**פתרון**. נתחיל מהסןף. דרקון עם ראש אחד אי-אפשר להרוג. יואב יכול להרוג דרקון עם שני ראשים. אבישי יכול להרוג דרקון עם 3 ראשים. עשהאל יכול להרוג דרקון עם 3 ראשים. דרקון עם 5 ראשים אי-אפשר להרוג.

דרקון עם 6 ראשים, יואב יכול להפוך אותו לדרקון עם 2 ראשים ולהרוג אותו.

נוכיח באינדוקציה, שניתן להרוג דרקון עם K2 ראשים לכל K. בסיס האינדוקציה בעצם עשינו. אם יואב יכה דרכון כזה, נקבל דרקון אם  ראשים, ואם K אי-זוגי אנחנו כבר יודעים להרוג כזה דרכון לפי הנחת האינדוקציה. לכן ניתן לטפל במקרה ש-K זוגי, כלומר לדרכון יש L4 ראשים. אם עשהאל יכה בדרקון כזה, יישארו  ראשים, ועכשיו אבישי יכול להכות בו ויישארו  ראשים, וזה מספר זוגי.

בהנחה ש- המספר  לא שלילי, ועבור  כבר הסברנו איך להרוג את הדרקון. כלומר תמיד נוכל לעבור לדרקון עם מספר זוגי יותר קטן של ראשים, ואז נוכל להרוג אותו לפי הנחת האינדוקציה.

ברור גם כי !41 הוא מספר זוגי.