**6.** על לוח רשומים  מספרים שלמים עוקבים. בכל מהלך, מחלקים את המספרים לזוגות באופן שרירותי, וכל זוג מוחלף בסכום והפרש של שני המספרים שהיו (לא חייבים להחסיר את הקטן מהגדול, כל ההחלפות מתבצעות בו-זמנית). הראו שהלוח לעולם לא יגיע שוב למצב שבו רשומים  מספרים עוקבים.

**פתרון**. נזכיר נוסחה: .

מכאן .

נגדיר מספר . אז רואים כי  מתחלק ב- אבל לא ב-. זה נכון לא רק עבור סכום ריבועי המספרים מ-1 עד , אלה גם לסכום הריבועים של כל  מספרים עוקבים. ניתן להוכיח את זה באינדוקציה: אם ניקח רצף של  מספרים שלמים, נמחק מספר בסוף ונוסיף מספר בהתחלה (או להפך) שארית החלוקה ב- לא תשתנה. אבל בצורה כזאת נוכל לעבור בשלבים מכל רצף של  מספרים למספרים מ-1 עד .

כעת נבדוק, מה קורא לסכום ריבועים בפעולות שמתבצעות. אם יש שני מספרים  שמוחלפים בשני מספרים  אז סכום הריבועים  מוחלף בסכום אחר שהוא . ככה זה בכל זוג, אז בסופו של דבר סכום ריבועי המספרים מוכפל ב-2 בכל שלב.

מתחילים עם רצף של  ריבועים עוקבים, סכום ריבועיהם כמו שראינו מתחלק ב- ולא מתחלק ב-. מרגע זה בכל שלב סכום ריבועי המספרים יתחלק ב- לכן אלה לא יהיו מספרים עוקבים.