**5.** נתון מרובע חסום ABCD. מעגלים עם קטרים AB ו-CD נחתכים בנקודות  ו‑. מעגלים עם קטרים BC ו-AD נחתכים בנקודות  ו‑. מעגלים עם קטרים AC ו‑BD נחתכים בנקודות  ו‑. הראו שהישרים ,  ו- נפגשים בנקודה אחת.

**פתרון** **ראשון**. בעצם, מדובר על כך שהצירים הרדיקליים נפגשים בנקודה אחת. כלומר שקיימת נקודה שדרגה שלה ביחס למעגלים שהקטרים שלהם AB ו-CD אותו דבר, שדרגה שלה ביחס למעגלים שהקטרים שלהם AC ו-BD אותו דבר, ושדרגה שלה ביחס למעגלים שהקטרים שלהם AD ו-BC אותו דבר.

נבחר מערכת צירים שבה מרכז המעגל הוא ראשית הצירים. אז . הנקודה המיוחדת שנמצאת על שלושה הצירים הרדיקליים היא . שלושה המקרים דומים, לכן מספיק לבדוק אחד מהם. ניקח מעגלים שהקטרים שלה AB ו-CD. כלור מעגל ראשון מתואר באמצעות משוואה וקטורית , ושל המעגל שני  כלומר מרחק מאמצע הצלע לנקודה שווה לחצי עורך הצלע. אם נעלה בריבוע ונעביר את הכול לאגף שמאלי נקבל משוואות אלגבריות, ללא שורשים:

 

אגף שמאל בכל משוואה כזאת, גם כשהוא לא שווה ל-0, זה דרגת הנקודה לפי הגדרה. משוואת הציר הרדיקלי הוא



היינו רוצים לבדוק ש- מקיים את המשוואה.



נכפיל ב-4 ונקבל .

נפתח סוגריים:



וזה ברור, כי הכול מתקזז, הרי .

אם היינו מחלקים את הקודקודים לזוגות בצורה שונה, היינו מקבלים אותו דבר.

**פתרון** **שני**. לכל שתי נקודות X, Y נסמן  את אמצע הקטע XY, למשל  האמצע של AB, בדומה  האמצע של , וכו'. נסמן ב‑M את אמצע הקטע ; הוא מרכז המסה של 4 קודקודי המשולש, לכן באופן דומה זה גם האמצע של  וגם של . נסמן ב-O את מרכז העיגול, תהיה N נקודה כזאת ש‑M הוא האמצע של ON. עמו בפתרון הקודם, מטרתנו היא להראות ש-N היא על הציר הרדיקלי של מעגל שקוטרו AB ומעגל שקוטרו CD, ובאותו אופן אפשר יהיה להראות את זה לכל חלוקה אחרת של A, B, C, D לזוגות ולהסיק מכאן ש-3 הצירים הרדיקליים נפגשים ב-N.

היות והקטעים ON ו- חוצים זה את זה, אז  מקבילית.

נסמן  , .

בנוסף נסמן  , , ורדיוס המעגל .

משולש  ישר זווית, כי O נמצאת על האנך האמצעי של AB. לכן  . באופן דומה לחלוטין גם . מכאן





כעת בשני האגפים יש את הדרגות של N ביחס למעגל שהקטרים שלהם CD ו-AB, לכן N על הציר הרדיקלי וזה מה שרצינו להוכיח.