**7.** נתונות 100 ערימות, ובכל ערימה 400 אבנים. בכל מהלך, אבנר בוחר שתי ערימות, מוריד אבן אחת מכל אחת מהן, ומקבל כמות נקודות השווה להפרש (האי-שלילי) בין כמויות האבנים בשתי הערימות. אבנר חייב להוריד את כל האבנים בסופו של דבר. מהו סכום הנקודות המקסימלי שאבנר יכול להרוויח?

תשובה. 3920000

**פתרון.** אפשר ליצור טבלה עם 100 עמודות ו-400 שורות שתתאר את מהלך המשחק. כל עמודה מתאימה לערמה ספציפית. בתחילת המשחק טבלה ריקה. בכל מהלך נרשום סימנים: + או – במשבצות הפנויות העליונות של שתי עמודות. כאשר אבנר לוקח אבנים מערמות M ו-N שיש בהן  אבנים ו- אבנים בהתאמה, הוא מקבל  או  נקודות, תלוי מה יותר גדול. אז במשבצת הגבוהה יותר הוא יכתוב + ובמשבצת הנמוכה יותר – (ואם שתי הערמות באותו גודל, הוא יבחר באקראי איפה לרשום איזה סימן).

לפי טבלה קל לחשב את הניקוד הסופי: כל פעם שבשורה מספר  מופיע  נוסיף , וכל פעם שמופיע  נחסיר , וכשנסכם על כל הטבלה נקבל את הניקוד של אבנר.

כמות הפלוסים והמינוסים בטבלה זהה, הרי בכל מהלך מוסיפים סימן אחד מכל סוג.

נשים לב שבכל שורה יש לפחות + אחד ולפחות  אחד. אם נסתכל על הערימה הראשונה שירדה מגודל  , נקבל שהיא הייתה חייבת לבוא במינוס, ולכן מכל גודל יש ערימה שבאה במינוס, אם נסתכל על הערימה האחרונה נקבל שמכל גודל יש ערימה שמקבלת פלוס.

לפי התכונה הזאת, יש לכל היותר 99 פלוסים בשורות 201 עד 400, ולפחות פלוס אחד בשורות 1 עד 200, לכן הכי הרבה שהפלוסים יכולים לתרום לסכום זה



כמה שסכום הפלוסים תורם יותר, ככה גם סכום המינוסים מוריד פחות (כי סכום של כולם קבוע). לכן לא נוכל לקבל יותר מאשר:



השאלה היא האם אפשר להגיע לכזה מספר. בשביל זה צריך כמעט תמיד לקחת שני אבנים מערמות שאחת מהן גדולה מ-200, והשנייה לא. בהתחלה ניקח שתי ערמות, וניקח מכל אחד מהן 200 אבנים. לאחר מכן ניקח כל פעם ערמה של 400 וערמה של 200, ונעשה על הזוג הזה 200 פעולות. בסוף תישארנה שתי ערמות של 200, ונעשה עוד 200 פעולות. קל לראות, שזה בדיוק מוביל לטבלה מהסוג שרצינו.