**5.** צריך לסדר את המספרים  בטבלה , כך שכל שני מספרים עוקבים נמצאים בתאים שחולקים צלע, וכל שני מספרים בעלי אותה שארית בחלוקה ב- יהיו בשורה שונה ובעמודה שונה. עבור אילו ערכי  זה אפשרי?

**פתרון.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|  | 3 | 4 |  |  | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |  | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 64 |
|  |  |  |  |  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 36 |  | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 63 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |  | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 35 |  | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 62 |
| 5 | 6 | 7 | 16 |  | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 34 |  | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 61 |
| 10 | 9 | 8 | 15 |  | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 33 |  | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 60 |
| 11 | 12 | 13 | 14 |  | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |  | 50 | 49 | 48 | 47 | 46 | 45 | 44 | 59 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 |

כמו שרואים בציור עבור גדלים זוגיים קל להמציא דוגמאות, נוכיח בתור התחלה שאי אפשר עבור  אי-זוגי.

**הוכחה ראשונה.** עבור משבצת בשורה  ועמודה  נגיד שמשקלה הוא . מכיוון שבכל שורה ובכל עמודה מופיע בדיוק מספר אחד מבין , נקבל שסכום המשקלים שלהם הוא פעמיים סכום של כל מספרים מ-1 עד .

מאותה סיבה גם סכום המשקלים של  הוא אותו דבר. אבל מספרים אלה עוקבים למספרים ברשימה הראשונה. אז בכום המשקלים מתקבל מהסכום הקודם כאשר משנים אותו  בפעמים ב-1. אם  אי-זוגי, זה חייב להשתנות.

**פתרון שני.** נסתכל על מספר מהרשימה , נקרא לו , ליד  יש את המספר הבא, כלומר מספר מהרשימה , נקרא לו , בלי הגבלת הכלליות נניח ש- נמצא מעל  , בשורה של  צריך להופיע מספר נוסף מהרשימה הראשונה, נקרא לו  , אנו טוענים שההתאמה בין  ל- מזווגת את כל המספרים ברשימה, ולכן  זוגי.

כדי להוכיח את זה יש להראות שאם מתחילים את התהליך מ- חוזרים ל-, נניח ולא, אז המספר מהרשימה  שליד  חייב להיות מעליו, כי אם הוא מתחתיו אז נחזור ל- ובשורה שלו כבר יש את .

בשורה שמעל  יש עוד מספר מהרשימה , לידו יש עוד מספר מהרשימה , והוא חייב להיות מעליו (כי בשורה שלו ומתחתיו כבר יש איבר מהרשימה), עכשיו מאותו טיעון נקבל שהאיבר הבא מהרשימה  יהיה שורה נוספת למעלה, ותהליך זה ימשיך לנצח, ונקבל סתירה.

עכשיו נשאר לתת דוגמא עבור  זוגי, קל לראות את השיטה מהמקרים הקטנים.

נתחיל מ- בפינה שמאלית עליונה, ונזוז ימינה עד הסוף, אז נרד אחד למטה ונזוז שמאלה עד ריבוע לפני הסוף, אז נזוז אחד למטה ונזוז ימינה עד הסוף, נמשיך בצורה הזו עד שנגיע לשורה האחרונה, ואז נזוז שמאלה עד הסוף ואז למעלה עד הסוף.

יש להראות שאין מספרים שקולים מודולן  באותה שורה או אותה עמודה.

נתחיל משורות, נסתכל על המשבצת השמאלית בשורה כלשהי, כמות הצעדים עד שנגיע למשבצת האחרונה שעוברים בה בשורה מעל מתחלקת ב- מכיוון שבדיוק עוברים על כל המשבצות שמעל השורה שלנו, לכן המשבצת הזו שקולה למשבצת השמאלית, עכשיו אנחנו יורדים אחד למטה לשורה שלנו ואז אנחנו זזים על כל השורה שלנו, ולכן אנחנו רואים שבדיוק כל המספרים שונים.

לגבי העמודה השמאלית ברור שהכל שונה.

כל עמודה אחרת מורכבת ממשבצות בשורות זוגיות וכאלה בשורות אי-זוגיות, כמות הצעדים בין משבצת למשבצת מתחתיה הוא אי-זוגי ולכן הן שונות, כמות הצעדים בין משבצת למשבצת שתיים מתחתיה היא , לכן הזוגיות של משבצות תלויה רק בזוגיות השורה, ולכן בשורות מזוגיות שונה המשבצות שונות, עבור משבצות בשורות מאותה זוגיות הוא  כאשר הפרש השורות הוא  אבל זה לא יכול להתחלק ב- כי אז  מחלק את  כלומר הפרש בין מספרי השורות הוא לפחות , וזה לא יתכן.