**7.** נתבונן בקווים שבורים במישור משובץ שמתחילים בנקודה  עם קודקודים בנקודות שלמות, וכל קו הולך ימינה או כלפי מעלה. לכל קו כזה נתאים **תולעת**: הצורה שמורכבת מכל המשבצות שיש להן לפחות נקודה משותפת אחת עם הקו השבור. הראו שכמות התולעים שניתן לפרק לדומינו בדיוק ב- דרכים, כאשר  גדול מ-2, שווה בדיוק לכמות השלמים החיוביים שקטנים מ- וזרים ל-. (התולעים נחשבות לזהות, אם הן מורכבות מאותן המשבצות)

הערה: דומינו הוא מלבן  העשוי ממשבצות.

**פתרון.** נראה שני פתרונות.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

פתרון ראשון. ננסה להשיג נוסחת נסיגה.

נניח ויש לנו תולעת, והוספנו לה צלע באותו הכיוון שהיה בצעד הקודם, אז לצורה נוספו שתי משבצות, לדוגמא בציור תולעת שהוספנו לו קטע אופקי, ובתכלת המשבצות שהוספנו.

יש שתי דרכים לרצף את התולעת, אפשר לשים אבן דומינו על המשבצות התכלת, ואז נשאר לרצף את התולעת הקודמת, ואפשר למלא את שתי המשבצות בדומינו אופקיים, ואז יש לרצף את התולעת הלפני קודמת.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

במילים אחרות אם עבור תולעת מסוימת מספר הריצופים של התולעת הקודמת ושלה בהתאמה הם  אז עבור התולעת הבא המספרים האלו יהיו  .

נשאר להבין מה קורה כאשר מוסיפים צלע בכיוון השונה.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

ניתן לעשות דבר דומה, אפשר לשים דומינו על המשבצות התכלת, ונקבל שנשאר לרצף את התולעת הקודמת, או שאפשר לשים על המשבצות התכלת שתי דומינו אנכיים, הפעם זה לא שקול ללרצף תולעת כלשהי, ויש לנו משבצת שיש רק דרך אחת לשים בה דומינו (בציור זו המשבצת הימנית ביותר שבשורה השנייה מלמטה).

אחרי שנשים שם דומינו, אם יש לנו עכשיו שתי צלעות באותו כיוון (כמו בציור הראשון) נקבל שזה שקול לריצוף תולעת שמתקבל על ידי מחיקת שלוש צלעות אחרונות, אחרת נקבל שיש עוד משבצת שחייבים לשים עליה דומינו ספציפית (בציור השני המשבצת השמאלית בשורה האמצעית), ותהליך זה ממשיך, סך הכל נקבל שכמות הריצופים זה כמות הריצופים של התולעת הקודמת ועוד כמות הריצופים של התולעת שמתקבלת ממחיקת כל הצלעות עד שיש שתיים רצופות באותו הכיוון (ואז נמחוק את שתיהן).

אנו טוענים שנוסחא זו גוררת נוסחא יותר מגניבה, אם כמות הריצופים של התולעת שלנו היא  ושל הקודמת היא  ונוסיף צלע בכיוון השונה מהכיוון הליכה האחרון, אז כמות הריצופים היא .

כדי לראות את זה, נרשום שכמות הריצופים של התולעת אחרי מחיקת צלעות מתחלפות הוא  אז לפי נוסחת הנסיגה כמות הריצופים לתולעת החדשה הוא  , מצד שני לפי הנוסחאת נסיגה שלנו מופעלת על הנחש המקורי נוכל לראות ש- לכן כמות הריצופים היא:



ובכך הוכחנו את הנוסחא.

קיבלנו שאם עבור כל תולעת נרשום את כמות הריצופים שלה ושל הקודמת כ- אז מתולעת אפשר לעבור ל- או  , נשים לב שעבור שתי התולעים מאורך אחד הזוג הזה הוא  .

טענה: עבור כל תולעת, הזוג המתאים הוא  כך ששני המספרים זרים, ו- ועבור כל זוג כזה יש בדיוק שני נחשים שמקבלים אותו.

הוכחה: קל לראות ששני התנאים נשמרים בשתי הפעולות שלנו, ונכונות ל- ולכן כל נחש הוא עם זוג כזה.

נניח  זוג כזה, הוא יכל להגיע או מ- או מהזוג  , בשני המקרים המספרים זרים כי  זרים, אבל סכום המספרים בצד שמאל הוא  לכן בדיוק אחד מהם גדול מחצי , לכן אפשר להגיע רק מאחד מהזוגות האלו, מאינדוקציה על  אפשר להגיע לזוג הזה בבדיוק שני דרכים, ומכיוון שמפה אנחנו יודעים איזו פעולה צריך לעשות, קיבלנו את הטענה.

עכשיו ידוע שכמות המספרים בין  לחצי  שזרים לו זה בדיוק חצי מהמספרים שזרים לו, ולכן סיימנו!

**פתרון שני.** נשים לב שהצורה שמתאימה לתולעת היא די צרה, ולכן אין הרבה ריצופים, למעשה נטען את הדבר, אם עבור ריצוף נסמן את כל צלעות הנחש שמונח עליהן דומינו, נקבל שזה מגדיר ביחידות את הריצוף אלה אם אין אף צלע כזו, ואז יש שני ריצופים כאלו.

הוכחה: נניח היו שני ריצופים כאלה, נבחר משבצת כלשהי, שלא מכוסה על ידי אותו הדומינו בשני הרציפים, נלך למשבצת האחרת בדומינו שלה לפי הריצוף הראשון ונקבל משבצת חדשה ששונה בין שני הריצופים, אז נלך לפי הדומינו שמכסה אותה בריצוף השני, וככה נמשיך עד שנסגור מעגל. בשום נקודה לא יכלנו לחצות את הנחש מכיוון שהדומינו שחוצים את הנחש אותו דבר בשני הריצופים, ולכן המעגל חייב להיות בדיוק המעגל שמסתובב מסביב לכל הנחש, ומפה אפשר לראות בדיוק מה שני הריצופים.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

בהינתן הטענה הזו מספיק להבין עבור איזה בחירת צלעות יהיה ריצוף מתאים.

נסמן את התולעת בעזרת  כאשר אחד מסמן הליכה למעלה, ואפס הליכה שמאלה.

נניח סימנו שתי צלעות, כמו בציור, נקבל שבמשבצות התכלת חייבים לשים דומינו, ובין הצלעות נקבל שני חלקים שיש לרצף בנפרד, קל לראות שהתנאי לכך שזה אפשרי הוא שכמות המשבצות בכל צד היא זוגית.

קל לבדוק שכאשר מזיזים את הצלע האדומה אחד קדימה, אם זה לצלע באותו כיוון מוסיפים משבצת לכל צד, ואם בכיוון שונה מוסיפים שתי משבצות לצד אחד.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

לכן מה שחשוב הוא שבין כל שני צלעות שסימנו כמות הפעמים הכיוון נשמר תהיה מהזוגיות הנכונה (אי-זוגית),

למשל לסמן  או  זה בסדר כי יש הישמרות אחת, אבל  או  לא יעבדו.

מכיוון שלספור כמה דברים נשארים זה קשה, נשנה את הרישום בצורה הבאה, בתולעת, בכל ספרה זוגית נחליף מאפס לאחד או מאחד לאפס, כך נקבל ששמירת כיוון זו החלפת ספרה.

עכשיו התנאי הוא שבין כל שני סימונים יש כמות אי-זוגית של החלפות, או במילים אחרות אחרי סימון אפס צריך לסמן אחד ולהפך.

לכן אפשר לפרק את הריצופים לשני סוגים, אלה שנגמרים באפס, ואלה שנגמרים באחד, נסמן אותם ב- (בשניהם נרשה גם סדרה ריקה, וזה יסתדר עם שני הריצופים שלא חותכים את התולעת).

עכשיו קל ליצר נוסחת נסיגה, אם הוספנו אפס לתולעת, אז הסדרות החדשות הן סדרות שהסתיימו קודם באחד, ונוסיף להם את האפס בסוף, ולכן לאחר מכן הסדרות יהיה  , ואם נוסיף אחד בסוף נקבל שהמספרים עכשיו יהיו  .

מכאן קל להראות כי כל זוג מספרים  זרים יש בדיוק נחש אחד המקבל אותם, וכמות הזוגות הזרים שהסכום שלהם  זה בדיוק כמות המספרים הזרים ל-.