**6.** פנינה ויוסי משחקים משחק. לכל 5 משתנים שונים מבין  יש כרטיס יחיד עליו רשומה מכפלתם. פנינה ויוסי לוקחים כרטיסים לפי התור, פנינה מתחילה. כאשר כל הכרטיסים נלקחו, יוסי נותן ערכים למשתנים איך שמתחשק לו, כל עוד מתקיים . האם יוסי יכול לדאוג לכך שסכום המכפלות המצוינות על הכרטיסים שלו יהיה גדול יותר מסכום המכפלות על הכרטיסים של פנינה?

תשובה. יוסי מנצח!

**פתרון.** 10 זה מספר גדול אז נתחיל מבעיה מוקטנת, ננסה לפתור את הבעיה עבור 4 משתנים ומונומים באורך 2.

כלומר .

נשים לב שבמקרה זה מתקיים:

*כאשר:*

1. *כל האי שיוונות נובעים מלקחת אי-שוויון מ- ולהכפיל אותו באחד המשתנים האי שליליים שלנו.*
2. *אכן אי אפשר להגיד מי מבין יותר גדול (תרגיל לקורא)*

*מכיוון שפנינה בוחרת ראשונה היא כנראה תבחר את (מכיוון שהוא הכי גדול) ואז יוסי יצטרך להסתפק ב.*

*ואז פנינה תבחר באחד מבין ויוסי יבחר את השני.*

*ולבסוף פנינה תבחר את ויוסי יבחר את .*

*נשים לב שהמקום היחידי שבו יוסי יכול לנצח את פנינה הוא בזוג שם פנינה לא יודעת מראש מי יהיה הכי גדול, אז בואו ננסה לגרום לזה שבאחרים הוא לא יפסיד, כלומר :*

נשים לב ששני אלו ינבעו אם .

במקרה זה אם נסמן את המשתנים ב:

המונומים לבחירה הם:

ופרט להמונומים מתחלקים לזוגות, כך שיוסי יוכל תמיד לבחור את אותו מונום כמו פנינה חוץ משבו פנינה מחליטה מה לקחת ויוסי מקבל את מה שנשאר.

נשים לב שזו אסטרטגיה מנצחת מכיוון שקל למצוא הצבות כך ש:

1. למשל
2. למשל

לסיכום האסטרטגיה היא:

1. תכריז שבסוף תציב ב אותו דבר
2. אחרי כל בחירה של פנינה בחר את אותו מונום אלא אם פנינה בחרה את ואז בחר את השני
3. בחר הצבה בהתאם לאם נשארת עם או עם

כעת נעבור למקרה של 10 משתנים.

ננסה לבנות אסטרטגיה דומה, נחלק מראש את המשתנים ל-3 קבוצות כשבכל קבוצה נציב את אותו מספר לכל המשתנים.

נניח ש- וש- מופיע פעמים, מופיע פעמים, מופיע פעמים.
אז מספר הפעמים שהמונום  *מופיע (בהנחה ש) הוא:*

ננסה שהצבה כזו תגרום לכמה שיותר מונומים להופיע מספר זוגי של פעמים כך שנוכל להפעיל עליהם את אסטרטגיית הסימטריה כמו באסטרטגיה עבור 4 משתנים. (אבל לא כולם כדי שלא יהיה תיקו).

נשים לב שהשאלה כמה פעמים מונום מופיע היא מכפלה של מקדמים בינומיים ולכן כדאי לנו שלפחות אחד הגדלים יקיים ש- יהיה זוגי לכמה שיותר [וממשפט קומר](https://en.wikipedia.org/wiki/Kummer%27s_theorem) כדאי לנו ש יהיה חזקת 2 (אבל לא כולם כדי שלא יהיה תיקו).

לכן בחירה סבירה של גדלים היא:

נראה שהיא עובדת.

כאמור, מספר הפעמים שהמונום  *מופיע* הוא:

*וכדי ש יהיה אי זוגי חייב להיות 0 או 4.*

*ומכיוון ש אחרי שנחלק מונומים שווים לזוגות, המונומים שיישארו הם:*

*מתקיים:*

נקרא ל-  *המונומים הגדולים.*

לכן הדבר ההגיוני לעשות הוא שכאשר פנינה בוחרת מונום לא מזווג נבחר מונום הגדול לא מזווג (כי תמיד יהיה לנו לפחות אחד פנוי) וכאשר היא תבחר את המונום הלא מזווג הבא נבחר את המונום הלא מזווג האחרון שנשאר.

נראה שלכל בחירה של מונומים כזו (שליוסי יש לפחות מונום אחד גדול) יש בחירה של יוסי עבורה הוא מנצח:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| המונומים של יוסי | המונומים של פנינה | ההצבה | אי השוויון |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |