**3.** על מישור הדביקו שני דיסקים מעץ בצורת עיגולים (לא בהכרח חופפים), אחד בצבע ירוק ואחד בצהוב. נתונה גם זווית אינסופית שקרן אחת שלה צבועה בירוק והשנייה בצהוב. ניתן להזיז אותה במישור, כך שהדיסקים נמצאים תמיד מחוץ לזווית, והקרניים משיקות תמיד לדיסקים המתאימים (קרן ירוקה לדיסק ירוק, קרן צהובה לדיסק צהוב), ונקודות ההשקה אינן בקודקוד הזווית. הוכיחו שניתן לסמן קרן כלשהי שעוברת דרך קודקוד הזווית (ונעה ביחד עם הזווית) כך שלא משנה איך מזיזים את הזווית, הקרן עוברת בנקודה קבועה במישור.

**פתרון.** נגיד ש-Y ו-Z הם מרכזים של עיגול ירוק ועיגול צהוב,  ו- רדיוסיהם בהתאמה, ו‑ היא גודל הזוויתי של הזווית האינסופית. תהיה X נקודה במישור כך ש-, וגם (באיזה צד נמצאת X ביחס ל-ZY זה תלוי בכך, באיזה צד הניחו את הזווית על המישור, והאם הצלע הירוק והצהוב נמצאים בכיוון השעון או נגד כיוון השעון).

נחשוב על העתקת שמורכבת מסיבוב סביב X בזווית  ומתיחה אחידה (הומותטיה) עם מרכז ב-X והומותטיה עם מקדם  שמעבירה את Y ל-Z, ואת העיגול הירוק לעיגול הצהוב. העתקה זו גם מעתיקה את הקו הירוק לקו הצהוב (אם הצד של X נבחר נכון). לכן היחס בין המרחק מ-X לצלע הירוקה של הזווית לבין המרחק מ-X לצלע הצהובה של הזווית שווה ל-.

בתוך הזוויות, קבוצת הנקודות עם יחס מרחקים נתון לצלעות הזווית זו קרן שעוברת דרך הקודקוד. לכן קיימת קרן קבועה בתוך הזווית שנעה יחד עם הזווית שעליה נמצאת X.