**1.** על מסך המחשב מופיע מספר שלם חיובי המתחלק ב-7. סמן העכבר מסמן רווח בין שתי ספרות סמוכות של המספר. הוכיחו שקיימת ספרה שאפשר להכניס אותה לתוך הרווח כמה פעמים שנרצה, ותמיד המספר יתחלק ב-7.

**פתרון.**

נכתוב את המספר כסכום של הספרות התחתונות שלו והעליונות שלו כלומר $n=x+10^{k}y$ כאשר ל$x$ יש $k$ ספרות והסמן שלנו בדיוק מפריד בין $x$ ל$y$*.*

*ראשית, נראה שניתן תמיד להוסיף ספרה אחת, אם נוסיף את הספרה* $z$ *נקבל את*

$x+10^{k}z+10^{k+1}y$*.*

*ונרצה ש:*

$x+10^{k}z+10^{k+1}y=0 \left(mod 7\right)$*.*$10^{k}z=-x-10^{k+1}y \left(mod 7\right)$.

ומכיוון ש10 זר ל7 הוא הפיך וניתן לחלק בו $k$ פעמים ולכן קיים פתרון למשוואה ומכיוון שלכל שארית חלוקה ב7 יש ספרה מתאימה (לחלק אפילו 2 וניתן להשתמש ב7 במקום ב0 אם אתם לא אוהבים להוסיף אפסים בתחילת מספר) ניתן למצוא ספרה מתאימה.

כעת, נראה שניתן להוסיף את אותה ספרה שוב.

מכיוון שהמספר המקורי מתחלק ב7:

$x+10^{k}y=0 \left(mod 7\right)$.$10^{k}y= -x \left(mod 7\right)$.$10^{k}z=-x+10x=9x \left(mod 7\right)$*.*

כלומר יכולנו לרשום את המשוואה כתלות ב$x$ בלבד בתנאי שהמספר מתחלק ב7. ואכן במקרה שלנו המספר שאנחנו מוסיפים לו ספרה תמיד מתחלק ב7 ואנחנו מוסיפים את הספרה תמיד באותו מקום כך שהספרות התחתונות ($x$) נשארות אותו דבר ולכן הספרה שאנחנו צריכים להוסיף היא תמיד אותה ספרה!