**7.** במדינה וירטואלית יש לפחות שתי ערים. כל כביש מחבר שתי ערים, ומכל עיר אפשר להגיע לכל עיר באמצעות תנועה בכבישים (בין כל שתי ערים עובר לכל היותר כביש אחד). אם ניתן להתחיל לנוע מאחת הערים ולחזור לאותה עיר בלי לעבור פעמיים באותו כביש, המדינה נקראת **מורכבת**, ואחרת המדינה נקראת **פשוטה**.

ליאור ומנשה משחקים משחק. בהתחלה ליאור קובע כיוון לכל כביש, וממקם תייר באחת הערים. מרגע זה בכל תור ליאור עושה מהלך עם התייר באחד הכבישים בכיוון המותר, ולאחר מכן מנשה משנה את הכיוון בכביש אחד שנכנס או יוצא מהעיר אליה התייר הגיע. מנשה מנצח אם בשלב מסוים ליאור כבר לא יכול לבצע מהלך.

א. הראו כי מנשה לא יכול לנצח באף מדינה פשוטה.

ב. הראו כי מנשה יכול לנצח בכל מדינה מורכבת.

**פתרון. א.** בהתחלה ליאור יכוון את כל הקווים בכיוון של עיר A. מכל עיר יש מסלול הכי קצר יחיד ל-A (עם הוא לא היה יחיד, המדינה לא הייתה פשוטה), וכל קשת בכל מסלול כזה צריכה להיות מכוונה כלפי A. לאחר מכאן ליאור ממקם את התייר בעיר שמקושרת ל-A באמצעות כביש, ואז התייר יעבור ל-A.

בתורו מנשה צריך לשנות את כיוון של אחד הכבישים שמחוברים ל-A, נגיד כביש שהיה מכוון מ-B ל-A כעת יהיה מכוון מ-A ל-B. עכשיו אפשר להגיד שכל הכבישים מכוונים לכיוון של B.

התייר יצטרך לעשות מהלך יחיד שיש לו: מ-A אל B.

המצב בעצם דומה למצב שהיה מקודם, רק שעכשיו העיר B החליפה את העיר A. לכן אפשר להמשיך את המשחק באותה צורה.

**ב.** במדינה מורכבת יש מעגל. אפשר למצוא את המעגל הקצר ביותר, נקרא לו M. מכל עיר למעגל זה ניתן להגדיר מרחק: כמה כבישים צריך לעבור, על מנת להגיע למעגל M. נקרא לעיר זאת R.

נקבע שכל פעם כשתייר יגיע לעיר R, מנשה יכוון כביש שמוביל לעיר R החוצה מהעיר. מכיוון שבעיר R יש מספר סופי של דרכים, יהיה אפשר להגיע לעיר R רק מספר סופי של פעמים, לכן החל מרגע מסוים העיר R תצא מהמשחק ויהיה אפשר למחוק אותה מהמפה. זה לא יפריע להגיע מכל עיר אחרת לכל עיר אחרת, כי מכל עיר יש מסלול הכי קצר למעגל M שהוא לא עבור דרך R, הרי R היא הכי רחוקה מ-M.

לכן מספיק לתאר אסטרטגיה עבור מנשה למדינה עם עיר אחת פחות. כך אפשר להוריד ערים זו אחר זו, עד שיישאר רק מעגל M. נסביר איך מנשה ינצח במצב זה.

נצייר מפה של מדינה סתור מעגל, אם כיוונים על הכבישים. כל כיוון הוא נגד כיוון השעון או אם כיוון השעון. אם תייר נמצא בעיר בה שני הכבישים מכוונים באותו כיוון (שניהם אם כיוון השעון או שניהם נגד כיוון השעון), אחד מהם נכנס לעיר ואחד יוצא ממנו, מנשה יכול בתורו לשנות את כיוון הכביש שיוצא מהעיר ואז התייר תקוע. אם לא, שני הכבישים הפוכים בכיוון, מנשה יעשה שאחרי תורו שני הכבישים יהיו עם כיוון השעון.

אז בכל תור יהיו יותר ויותר כבישים עם כיוון השעון אבל זה לא יכול להימשך לנצח, כי יש מספר סופי של כבישים, אז בשלב מסוים הוא כן יגיע לעיר שבה שני הכבישים באותו כיוון, ואז מנשה מנצח.