**7.** דוד ואוריה משחקים משחק. נתונות  ערים, ובכל עיר כמות שווה של תושבים. בהתחלה לכל תושב יש מטבע אחד בדיוק (המטבעות זהים). בכל תור דוד בוחר מועצה המורכבת מתושב אחד מכל עיר, ואוריה לוקח את כספם של חברי המועצה, ומחלק אותו ביניהם מחדש כך שחלוקת הכסף תהיה שונה מהחלוקה שהייתה לפני המהלך. דוד מנצח אם בכל עיר יש לפחות אדם אחד ללא כסף. הראו שדוד יוכל לנצח אם בכל עיר:

א. יש בדיוק  תושבים.

ב. יש בדיוק  תושבים.

**פתרון.** נסדר את כמות המטבעות אצל האנשים בטבלה של  שורות. כל שורה תתאים לעיר ספציפית, ובכל שורה נרשום את כמות המטבעות שיש לתושבי העיר בסדר עולה משמאל לימין.

בכל פעולה דוד בוחר משבצת בכל שורה, אוריה משנה את המספרים במשבצות אלה, ואז בחלק מהשורות נצטרך למיין את המספרים מחדש: אם אחד המספרים החדשים קטן מדי הוא צף שמאלה, ואם הוא גדול מדי הוא זז ימינה.

דוד בתורו יחשב סכום בכל עמודה, וישתדל למצוא שתי עמודות סמוכות שבהן סכום המספרים זהה. אם יש שתי עמודות כאלו, סימן ששתי העמודות זהות זו לזו. אכן, המספרים בעמודה הימנית הם קטנים או שווים מהמספרים התואמים בעמודה השמאלית, כי השורות ממוינות, ואם באחת השורות המספר הימני קטן יותר, אז כבר הסכום יהיה קטן יותר.

אם דוד יצליח למצוא שתי עמודות סמוכות עם סכום זהה, הוא יעשה ועדה מהעמודה הימנית. אוריה יצטרך לשנות חלק מהמספרים: חלקם ירדו, וחלקם יעלו. המספרים שירדו יזוזו שמאלה, והמספרים שיעלו עלולים לזוז ימינה.

נגדיר מספר עבור כל מצב שאורכו  בבסיס . בהתחלה נרשום את המספרים של העמודה הראשונה (השמאלית) מלמעלה למטה, אחרי זה המספרים של העמודה השנייה מלמעלה למטה, וכך הלאה. מספר זה ירד בכל פעולה מהסוג שתיארנו, כי אחד המספרים בעמודה השמאלית הוקטן, והמספרים שהוגלו ימניים יותר. לכן פעולות מסוג זה לא יכולים להתבצע עד אינסוף.

לכן נגיע למצב שכבר אי-אפשר לעשות פעולות כאלה, כלומר בכל עמודה סכום המספרים גדול יותר מאשר בכל עמודה שמאלית יותר.

זה כבר פותר את סעיף א'. אכן, נסתכל על המצב שבו דוד לא יכול להמשיך לעשות כאלה מהלכים. אם סכום המספרים בעמודה השמאלית הוא 0, הוא השיג את מטרתו. אם לא אז הסכום בעמודה הראשונה הוא לפחות 1, הסכום בעמודה השנייה הוא לפחות 2, הסכום בעמודה השלישית הוא לפחות 3, ... הסכום בעמודה האחרונה הוא לפחות , ולכן הסכום הממוצע בעמודה הוא לפחות . אבל הסכום הממוצע בעמודה היה  ולא היה יכול לעלות.

על מנת לפתור סעיף ב', נתחיל באותה אסטרטגיה. אז ברגע שנתקע (ואם עוד לא השגנו את המטרה) הסכום בעמודה הראשונה הוא לפחות 1, הסכום בעמודה השנייה הוא לפחות 2, ..., הסכום בעמודה האחרונה הוא לפחות  ולכן הסכום הממוצע בעמודה הוא לפחות . אבל הוא גם בדיוק , לכן כל אי-השוויונים שאמרנו הופכים לזהויות.

לכן הסכום בעמודה אחרונה הוא בדיוק 1, הסכום בעמודה השנייה הוא בדיוק 2, וכו'.

לכן בעמודה הראשונה יש יחידה אחת, והשאר אפסים. ניתן להניח שהיחידה היא בשורה הראשונה.

נסתכל על המצב בעמודה השנייה. הסכום בעמודה השנייה הוא 2; במשבצת של שורה הראשונה רשום לפחות 1, כי השורה הראשונה מסודרת בסדר עולה. יש שני מצבים של מה שיש בעמודה שנייה: יתכן שבשורה ראשונה רשום 2, והשאר אפסים, ויתכן שבשורה ראשונה רשום אחד ובעוד שורה (ללא הגבלת הכלליות, השורה השנייה) גם מופיע 1.

במקרה הראשון, כשבעמודה השנייה יש  אפסים, דוד יוכל לנצח במהלך אחד: הוא יבחר ועדה שבה יש משבצות ראשונה בשורה ראשונה ומשבצות אחרות בעמודה השנייה.

במקרה השני, ניתן להניח שבשורה העמודה השנייה מתחילה בשני אחדים, ואחרי זה אפסים.

במקרה זה נסתכל על העמודה השלישית. בשורה ראשונה ושנייה רשום לפחות 1, ובשורות אחרות יכולים להיות אפסים, אבל באחת מהן יכול להיות גם מספר חיובי.

במקרה הראשון ניקח ועדה כזאת: בשתי שורות ראשונות מהעמודה השנייה, ובשורות האחרות משבצות מהעמודה השלישית. אז או נציג של שורה ראשונה יאבד את המטבע שלו וזה כבר ניצחון, או שהמציג של העמודה השנייה יאבד את המטבע שלו וזה מצב שממנו הראנו איך אפשר להגיע לניצחון.

לכן המקרה שמעניין אותנו זה כאשר בעמודה הראשונה יש 1 רק במקום הראשון, בעמודה השנייה יש אחדים בשורה אחד ושתיים, ובשורה שלישית אחדים בשורות 1, 2, ו-3.

כעת נסתכל על העמודה הרביעית ובאופן דומה נראה שהמצב המעניין היחיד זה כאשר בעמודה רביעית יש אחדים בשורות 1, 2, 3, ו-4, ואחרת אפשר לעבור לאחד המצבים שבהם אנחנו יודעים לנצח אפילו בלי לערב את העמודה הרביעית. באופן דומה ננתח עמודות 5, 6, ... ,  ונראה שבעמודה מספר  יש אחדות בשורות 1 עד  ואפסים אחרי זה, ואחרת אנחנו יודעים איך לנצח.

נעשה כעת פעולה על העמודה מספר  ; זה יצור אפס נוסף באחת השורות, ויוביל אותנו לאחד המצבים בהם אנחנו יודעים איך לנצח.