**6.** על ציר המספרים סומנו אינסוף מספרים טבעיים. כאשר גלגל מתגלגל על הציר, כל נקודה מסומנת משאירה עליו סימן נקודתי. הוכיחו כי קיים מספר ממשי , כך שאם מגלגלים גלגל שרדיוסו  אז על כל קשת של המעגל שגודלה הזוויתי  יישאר סימן אחד לפחות.

**פתרון.** נחלק את הגלגל ל-720 קשתות של חצי מעלה. אנחנו נדאג לכך, שבכל קשת כזאת יישאר סימן, מזה ינבע שעל כל קשת של  יהיה סימן.

בכל שלב נבחר קשת שעליה עדיין לא דאגנו לסימן. אם עושים שינויים קטנים, אז הסימנים שכבר דאגנו להם יזוזו לא יותר מאשר ב-, נגיד שינויים של  לכל היותר. אבל גם שינוי קטן כזה יגרום לתנועה גדולה של סימן שמתקבל מנקודה מסומנת רחוקה מאוד על הישר. אנחנו יודעים, שעל הציר יש נקודות מסומנות רחוקות כמה האפשר. לכן שינוי של רדיוס הגלגל ב- יוכל להזיז את הסימן מהנקודה הזאת לכל נקודה שנרצה על הגלגל; נבחר שינוי שיגרום לנקודה הזאת להגיע בדיוק לאמצע הקשת הריקה שבחרנו.

לאחר 720 הזזות כלאה (קטנות יותר ויותר) ליד מרכז של כל קשת של חצי מעלה, במרחק  לכל היותר, יהיה סימן.