**3.** הראו כי:

א. כל מספר מהצורה , כאשר  שלם, ניתן להציג בצורת סכום  כאשר  הם מספרים שלמים.

ב. כל מספר שלם ניתן להציג בצורת סכום  כאשר  הם מספרים שלמים.

**פתרון. א)** נחסר שתי חזקות שלישיות במרחק 3 זו מזו:

$$n^{3}-\left(n+3\right)^{3}=n^{3}-\left(n^{3}+9n^{2}+27n+27\right)=-9n^{2}-27n-27$$

כעת ננסה לבטל את הגורם הריבועי: אם נוסיף לביטוי את הריבוע $\left(3n+4\right)^{2}=9n^{2}+24n+16$, נקבל:

$$\left(-9n^{2}-27n-27\right)+\left(9n^{2}+24n+16\right)=-3n-11$$

ניזכר שרצינו להציג מספר מהצורה $3k-2$, שזה דומה למה שקיבלנו. אם נציב $n=-k-3$, נקבל:

$$-3n-11=-3\left(-k-3\right)-11=3k-2$$

אם נשלב הכול ביחד, נקבל הצגה כדרוש:

$$n^{3}-\left(n+3\right)^{3}+\left(3n+4\right)^{2}=n^{3}+\left(-n-3\right)^{3}+\left(3n+4\right)^{2}=3k-2$$

כאשר $n=-k-3$.

**ב)** בהינתן $m$ שלם, נרצה להציגו בתור $m=a^{2}+b^{3}+c^{3}+d^{3}$. בסעיף א' ראינו שבאמצעות $a^{2}+b^{3}+c^{3}$ ניתן לייצג כל מספר מהצורה $3k-2$, ולכן מספיק למצוא הצגה $m=3k-2+d^{3}$, או באופן שקול:

$$\left(m+2\right)-d^{3}=3k$$

למעשה, מספיק למצוא $d$ כך ש-$\left(m+2\right)-d^{3}$ יתחלק ב-3.

**טענה:** לכל $N$ שלם, $N^{3}-N$ מתחלק ב-3.

**הוכחה:** נפרק לגורמים את הפולינום:

$$N^{3}-N=N\left(N^{2}-1\right)=N(N-1)(N+1)$$

המספרים $N-1,N,N+1$ הם שלושה שלמים עוקבים, ולכן אחד מהם מתחלק ב-3. מכאן שמכפלתם מתחלקת ב-3.

לפי הטענה, ניתן לבחור $d=m+2$ ולקבל:

$$\left(m+2\right)-d^{3}=\left(m+2\right)-\left(m+2\right)^{3}=3k$$

כאשר $k=\frac{\left(m+2\right)-\left(m+2\right)^{3}}{3}$ הוא מספר שלם.

**הערה:** הפעולה הראשונה שביצענו (חיסור שתי חזקות שלישיות עם הפרש קבוע) נקראת **נגזרת דיסקרטית**, וניתן לבצע אותה לכל פולינום. התכונה החשובה של נגזרת דיסקרטית שבה השתמשנו היא שהיא מורידה את דרגת הפולינום ב-1.