**3.** הראו כי:

א. כל מספר מהצורה , כאשר  שלם, ניתן להציג בצורת סכום  כאשר  הם מספרים שלמים.

ב. כל מספר שלם ניתן להציג בצורת סכום  כאשר  הם מספרים שלמים.

**פתרון. א)** נחסר שתי חזקות שלישיות במרחק 3 זו מזו:

כעת ננסה לבטל את הגורם הריבועי: אם נוסיף לביטוי את הריבוע , נקבל:

ניזכר שרצינו להציג מספר מהצורה , שזה דומה למה שקיבלנו. אם נציב , נקבל:

אם נשלב הכול ביחד, נקבל הצגה כדרוש:

כאשר .

**ב)** בהינתן שלם, נרצה להציגו בתור . בסעיף א' ראינו שבאמצעות ניתן לייצג כל מספר מהצורה , ולכן מספיק למצוא הצגה , או באופן שקול:

למעשה, מספיק למצוא כך ש- יתחלק ב-3.

**טענה:** לכל שלם, מתחלק ב-3.

**הוכחה:** נפרק לגורמים את הפולינום:

המספרים הם שלושה שלמים עוקבים, ולכן אחד מהם מתחלק ב-3. מכאן שמכפלתם מתחלקת ב-3.

לפי הטענה, ניתן לבחור ולקבל:

כאשר הוא מספר שלם.

**הערה:** הפעולה הראשונה שביצענו (חיסור שתי חזקות שלישיות עם הפרש קבוע) נקראת **נגזרת דיסקרטית**, וניתן לבצע אותה לכל פולינום. התכונה החשובה של נגזרת דיסקרטית שבה השתמשנו היא שהיא מורידה את דרגת הפולינום ב-1.