**7.** המלך החליט לפנק קבוצה של $n$ חכמים. הוא שם אותם בטור אחד אחרי השני (כך שכולם מסתכלים לאותו כיוון) ושם לכל אחד כובע לבן או שחור על הראש כך שכל אחד מהם רואה את הכובעים של אלה שעומדים לפניו. החכמים אומרים לפי הסדר (מהאחרון בטור לראשון) צבע (לבן או שחור) ומספר שלם חיובי לבחירתם. בסוף המלך סופר כמה חכמים אמרו את הצבע של הכובע שעל ראשם, וזו כמות ימי החופשה שכל קבוצת החכמים תקבל. המלך הרשה לחכמים לסכם ביניהם מראש מה להגיד. אלא שאז החכמים גילו ש-$k$ מתוכם משוגעים (אבל לא יודעים מי בדיוק) ואומרים צבע ומספר בלי קשר למה שסוכם מראש. מהו מספר ימי החופשה המקסימלי שהחכמים יכולים להבטיח לעצמם, ללא תלות במיקומם של החכמים המשוגעים בטור?

**תשובה:** .

נתחיל מלהראות שאי-אפשר טוב יותר מזה.

נניח המשוגעים עומדים בסוף הטור ברצף, ונניח גם שכולם יודעים את זה, המשוגעים יכולים להגיד הפוך מהכובעים שלהם, ולא להגיד שום מידע נוסף במספרים, אז כשמגיע תור השפוי הראשון הוא לא יודע כלום על הכובע שלו, ולכן אי-אפשר להבטיח שהוא יצדק, כלומר יש לפחות  טעויות.

נותר להמציא אסטרטגיה.

בתור התחלה נסביר מה הם אומרים במספר, כל חכם יכול לתאר את כל הכובעים שהוא רואה מולו לפי הסדר, למשל בעזרת ספרות המספר, זה תמיד מה שהם יגידו במספר (אלה אם הם משוגעים).

בכל רגע, אחד החכמים יקרא המנהיג, וכולם ידעו שהוא המנהיג, המנהיג הראשון הוא האחרון בטור, והמנהיג משתנה במהלך המשחק.

בכל תור חכם נזכר במה המנהיג אמר שצבע הכובע על ראשו, וינחש שזה הצבע של הכובע שלו.

לאחר שאיש כלשהו מנחש (שפוי או משוגע), אם צבע הכובע שהוא ניחש מתאים לצבע הכובע שהמנהיג אמר שיש לו, אז הוא נהיה המנהיג החדש.

ככה ממשיכים עד הסוף.

נשים לב לדברים הבאים, כל חכם שפוי יהיה המנהיג אחרי תורו, כי הוא יקשיב לאסטרטגיה, בנוסף אם יש חכם שפוי אחריו הוא גם יאבד את המנהיגות כי השפוי הבא יקבל מתישהו את המנהיגות.

בנוסף, כל פעם שחכם שפוי מאבד את המנהיגות, אז סימן שמישהו הקשיב לו, ולכן ניחש את הצבע הנכון (כי השפוי אמר את הצבעים הנכונים).

בעזרת שני אלה, נקבל שעל כל שפוי שיש אחריו עוד שפוי יש ניחוש נכון מתישהו, מכיוון שיש  חכמים שפויים, ובדיוק אחד מהם הוא האחרון, יש לפחות  ניחושים נכונים, וניצחנו.