**1.** לאלאדין יש מספר מטילי זהב זהים ולפעמים הוא מבקש מהג'יני להגדיל את הכמות שלהם. הג'יני מוסיף 1000 מטילים (זהים למקוריים) אבל אז הוא לוקח לעצמו בדיוק חצי מהמסה הכוללת שהתקבלה. האם ייתכן שלאחר 10 בקשות כאלה אלאדין הגדיל את כמות הזהב שברשותו אם במהלך התהליך הג'יני לא נאלץ לחתוך אף מטיל זהב לשניים?

**פתרון.** לא.

**הוכחה ראשונה.** אם לאלאדין כמות מטילי זהב כלשהי, לאחר בקשה אחת מהג'יני כמות מטילי הזהב שלו תהיה הממוצע בין הכמות הקודמת ל1000. לכן על מנת שהתהליך יגדיל את כמות הזהב של אלאדין, כמות הזהב ההתחלתית חייבת להיות קטנה מ1000 מטילים. יתר על כן, הכמות אחרי בקשה היא בדיוק באמצע בין הכמות לפני הבקשה ו-1000, כלומר המרחק בין כמות הזהב של אלאדין ל-1000 קטן פי 2 אחרי כל בקשה. מכיוון שאלאדין קיבל כמות שלמה של מטילים בסוף, ההפרש בינה לבין 1000 הוא לפחות 1 (אם ההפרש היה 0, זה אומר שאלאדין התחיל עם 1000 מטילי זהב והכמות נשארה קבועה לאורך כל התהליך ובפרט לא גדלה). לכן, המרחק לפני הבקשה האחרונה היה לפחות 2, ולפני הבקשה שקדמה לכך – לפחות 4, וכו' – נקבל שבהתחלה המרחק ל1000 היה לפחות. אבל אמרנו שהתחלנו בכמות קטנה מ-1000, והיא גם צריכה להיות חיובית, אז זה לא ייתכן. מש"ל.

**הוכחה שנייה**. נסמן את כמות מטילי הזהב של אלאדין בסוף התהליך ב-. אם אחרי בקשה מהג'יני לאלאדין יש  מטילים, ולפני כן היו לו , נקבל , כלומר . לכן, אלאדין התחיל עם כמות זהב של.

אנחנו רוצים שזה יהיה קטן מהכמות הסופית, כלומר  לכן . מצד שני, הכמות הסופית צריכה להיות חיובית, ולכן נקבל . סתירה. מש"ל.