**7.** עיר מסוימת היא בצורת מלבן המחולק למשבצות, ובכל משבצת נמצא בניין בן חמש קומות. בהתאם לתכנית פינוי-בינוי, אפשר לבחור שתי משבצות כלשהן שסמוכות לפי צלע ושעל כל אחת מהן יש בניין, להרוס את הבניין הנמוך יותר מבין השניים (או אחד מהם אם שניהם באותו גובה), ולהוסיף קומות לבניין השני כך שכמות הקומות הכוללת לא השתנתה. מה הוא המספר המינימלי של בניינים שיכולים להישאר בעיר, אם גודל העיר הוא:

א.  משבצות?

ב.  משבצות?

**תשובה.** א. 25. ב. 282.

בעצם תשובה יותר פשוטה שמתאימה לשני הסעיפים היא , כאשר  הוא מספר הבתים בהתחלה, ו- מסמן תקרה, כלומר מספר שלם הכי קטן שגדול או שווה מהמספר הנתון.

**פתרון.** אנחנו נחלק את הגובה של כל בית ב-5, זה לא משנה שום דבר באופן מהותי. בשאלה מתקיים ***חוק שימור הקומות***: סכום הגבהים של הבתים לא משתנה בתהליך.

על מנת שבניין יגדל, צריך להשמיד בית סמוך אליו. מכיוון שלכל בית יש רק 4 שכנים (או פחות), הוא יכול לגדול רק 4 פעמים. כל פעם שהבית גודל, הוא גודל לכל היותר פי 2. לכן גם בסוף התהליך גובה של כל בית הוא 16 לכל היותר.

אם בתחילת התהליך יש  בתים ובסוף התהליך  בתים, אז לפי חוק שימור הקומות , כלומר . מכיוון ש- שלם .

נוכיח שאפשר להגיע למספר זה בדיוק בשני הסעיפים.

טענה 1. ריבוע  של בתים בגובה 1 אפשר להפוך לבית 1 של 16 קומות.

הוכחה. ראו ציור:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 |  | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 |  | 2 | 2 | 2 | 2 |  | ← | 4 | 4 | → |  |  | ↓ | ↓ |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 |  | 2 | 2 | 2 | 2 |  | ← | 4 | 4 | → |  |  | 8 | 8 |  |  |  | 16 | → |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 |  | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

זה כבר מספיק בשביל לפתור את סעיף א'. אכן, ריבוע  מתפרק ל- ריבועים , וכל ריבוע כזה יהפוך לבית בגובה 16, וזה יהיה מספר מינימלי של בתים.

**טענה 2.** אפשר גם להפוך 16 בתים שעומדים בצורה כמו בציור לבית אחד.

הוכחה. ראו ציור:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  |  |  | ↓ | ↓ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 |  |  |  | 2 | 2 |  |  |  | ← | 4 |  |  |  |  | ↓ |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 |  | ← | 2 | 2 | → |  |  | 4 | → |  |  |  | 8 |  |  |  |  | 16 |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 |  | ← | 2 | 2 | → |  |  | 4 | → |  |  |  | 8 |  |  |  |  | ↑ |  |  |
| 1 | 1 |  |  |  | 2 | 2 |  |  |  | ← | 4 |  |  |  |  | ↑ |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 |  |  |  | ↑ | ↑ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

אם נוריד מהתמונות שציירנו 2 שורות אחרונות, נקבל תוכנית של איך אפשר להפוך 12 בניינים קטנים לבניין אחד שגובהו פי 12.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

נפתור כעת את סעיף ב'. מעכשיו נחשוב רק על בלוקים : העיר מורכבת מ‑ בלוקים כאלה. אנחנו יודעים להפוך ריבוע של  בלוקים לבניין אחד בגובה מקסימלי (טענה 1). אנחנו גם יודעים להפוך 4 בלוקים שמסודרים בצורת T (בלוק ו-3 שכנים שלו) לבניין אחד בגובה מקסימלי (טענה 2). לכן נוכל להפוך מלבן של  בלוקים לבניינים בגובה מקסימלי, כי אפשר לכסות מלבן כזה בצורות של 4 בלוקים משני סוגים אלה, כמו בציור.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

אפשר לחלק גם מלבן של  בלוקים למלבנים מסוג זה, ויישאר לנו מלבן בגודל  בלוקים. נוכל להורי מקצותיו שני מלבנים , ואז יישאר מלבן  בלוקים. כמובן אי-אפשר לחלק אותו לרביעיות של בלוקים וגם כמו הבלוקים לא מתחלק ב-4. לכן אנו נחלק חלק מהבלוקים לרביעיות, ובסוף יישארו לנו 5 בלוקים מיותרים: 2 בלוקים סמוכים בצד אחד ו-3 בלוקים סמוכים מצד שני. שני בלוקים אפשר להפוך לבניין של 8 קומות (כמו שעשינו בהוכחה של טענה 1, חוץ מהצעד האחרון), ו-3 בלוקים אפשר להפוך לבניין של 12 קומות כמו שהערנו לאחר ההוכחה של טענה 2, ולכן נוכל להגיע למצב של בית בגובה 8, בית בגובה 12 והרבה בתים בגובה 16, וזה ייתן את הכמות שרצינו.