**4.** בפניכם 100 דלתות, ולכל אחת מהן יש מפתח (שפותח רק אותה). הדלתות ממוספרות מ-1 עד 100. גם המפתחות ממוספרים מ-1 עד 100, אבל המספור של המפתחות יכול להכיל טעויות: מספר של מפתח יכול להיות שווה למספר הדלת שהוא פותח, ויכול להיות שונה ממנו ב-1. תוך ניסיון אחד אפשר לבחור מפתח כלשהו ודלת כלשהי, ולבדוק האם המפתח פותח את הדלת. האם ניתן לקבוע בוודאות איזה מפתח מתאים לכל דלת:

א. תוך לא יותר מ-99 ניסיונות;

ב. תוך לא יותר מ-75 ניסיונות;

ג. תוך לא יותר מ-74 ניסיונות.

תשובות. א. כן. ב. כן. ג. לא.

**פתרון.** נסביר איך ניתן לגלות מה פותח דלתות 1, 2, 3, 4 תוך 3 בדיקות.

בדיקה ראשונה: בודקים האם מפתח 3 פותח דלת 3.

אם כן, נבדוק בנוסף האם מפתח 2 פותח דלת 2 ומפתח 4 פותח דלת 4.

 אם מפתח 2 פותח דלת 2, אז מפתח 1 פותח דלת 1;

 אם לא, אז מפתח 2 פותח דלת 1 (כי מפתח 3 פותח דלת 3) ומפתח 1 פותח דלת 2.

 אם מפתח 4 לא פותח דלת 4, אז רק מפתח 5 יכול לפתוח דלת 4,

ומפתח 4 פותח דלת 5.

 אם מפתח 3 לא פותח דלת 3, נבדוק האם מפתח 2 פותח דלת 3.

 אם כן, אז דלת 1 נפתחת על ידי מפתח 1, ודלת 2 על ידי מפתח 3.

 אז בבדיקה נוספת נוכל לגלות, האם מפתח 4 פותח דלת 4

 (ואם לא – אז דלת 4 מתאימה למפתח 5 ולהפך)

 אם מפתח 3 ומפתח 2 לא פותחים דלת 3, אז מפתח 4 מתאים לדלת 3,

ומפתח 3 פותח דלת 4.

 נשאר לבדוק לגבי דלתות 1 ו-2, אז נבדוק האם מפתח 2 פותח דלת 2.

 אם כן, אז מפתח 1 גם פותח דלת 1, ואם לא – מפתחות 1 ו-2 הפוכים.

ובכן, בכל המקרים נגלה תוך 3 בדיקות איך לפתוח דלתות 1, 2, 3, 4 (ואם דלת 4 מתאימה למפתח 5, נגלה בנוסף גם שדלת 5 נפתחת על יד מפתח 4).

באופן דומה לחלוטין נוכל תוך 3 בדיקות נוספות לגלות מה פותח דלתות 5-8, ולאחר מכן 9-12, וכו', ולכן על 100 דלתות נצטרך להשקיע 75 בדיקות.

נוכיח שאי-אפשר פחות מ-74, אפילו אם יש מגבלה נוספת: לכל  שלם, המפתחות  מתאימים לדלתות  (אבל לאו דווקא בסדר זה).

אם מפתחות 1, 2, 3, 4 מתאימים 1, 2, 3, 4, יש לזה 5 אפשרויות. אפשר פשוט לבדוק את כל האפשרויות כמו שעשינו בציור, ואפשר גם להבין את זה באמצעות מספרי פיבונאצ'י. בכל מקרה, אי-אפשר להבדיל בין 5 מקרים באמצעות 2 בדיקות של כן ולא, לכן כל רביעייה דורשת 3 בדיקות לפחות, ולכן נזדקק ל-75 בדיקות בסה"כ.