**5.** נתון מספר . יוסי רוצה לפרוס גוש גבינה לחתיכות לפי הכללים הבאים: 1) בהתחלה חותכים את הגבינה לשתיים, אחרי זה בוחרים את אחת החתיכות וחותכים אותה לשתיים, אחרי זה בוחרים אחת מ-3 החתיכות וחותכים אותה לשתיים, וכן הלאה. 2) אחרי כל חיתוך, יחס המשקלים של כל שתי חתיכות חייב להיות גדול מ-.

א. הוכיחו כי עבור , ניתן להמשיך את התהליך עד אינסוף.

ב. הוכיחו כי לכל , תהליך החיתוך חייב לעצור אחרי מספר סופי של צעדים.

ג. מהו המספר המקסימלי של חלקים שאפשר לקבל עבור ?

**תשובה.**

**פתרון.**

**א.** במהלך הראשון נחלק את הגבינה לשני חלקים כמעט שווים, כך שהיחס כמעט אחד. נניח הגענו למהלך כלשהו, והחתיכת גבינה הכי גדולה במשקל , השנייה הכי גדולה במשקל , והכי קטנה במשקל , נרצה לחתוך את  לכמעט חציים מדויקים, כלומר להפוך אותו ל-  כאשר  מספר קטן לבחירתנו. נסתכל מה התנאים, אנו רוצים ש-, נשים לב ש כי , ולכן אם  מספיק קטן זה אכן מתקיים, מעבר לזה נבחר אותו כך שהחתיכות גבינה החדשות שונות במשקל מכל חתיכות הגבינה הקיימות, ואחת מהשנייה (זה אפשרי כי יש כמות סופית של חתיכות גבינה), ולכן זה חיתוך מותר, ונוכל להמשיך לנצח.

**ב.** נתחיל מלשים לב שאנו תמיד חייבים לחתוך את החתיכה הכי גדולה, זה מכיוון שאם  ונחתוך את , אחת החתיכות תהיה לכל היותר חצי , ובהשוואה עם  נקבל שזה מהלך לא חוקי.

דבר שני נשים לב, שאם אנו היינו עושים אינסוף מהלכים, היינו חייבים לחתוך כל חתיכה מתישהו, כי אם לא, אז כל החתיכות היו חייבות להיות גדולות מקבוע מסוים, אבל סכום המשקלים של החתיכות קבוע, ולכן זה לא אפשרי.

עכשיו נניח ש- שתי חתיכות, אז מתישהו נחתוך את , אז אחת החתיכות תהיה קטנה מ- ולכן  או  .

לכן נקבל שאם החתיכות הן:



אז:



אבל אז:



ועבור  גדול מספיק זה פחות מ- מכיוון ש-.

**ג.**

נתחיל מלתת דוגמא, ניקח גבינה עם משקל כולל אחר (אחר כך אפשר להכפיל בקבוע את משקל הגבינה) וגם נתחיל עם איך החתיכות יראו בסוף, ונראה שאפשר ללכת אחרוה.

בהתחלה החתיכות יהיו:



עכשיו כל פעם נסכום את שתי הגבינות הכי קטנות:











קל לבדוק מה  צריך לקיים:







וקל לבדוק שמספר טיפה יותר גדול מ- יקיים זאת.

נניח שמישהו חתך, והגיע לארבע חתיכות  , אז מכיוון ש:



נקבל שלא יכול להיות שכל היחסים בין חתיכות עוקבות הן יותר מ-1.2, ולכן מהשלוש חתיכות הגדולות, יש אחת לפחות שאסור לחתוך.

נבצע עוד שתי חיתוכים, ונסתכל על חתיכת הגבינה הגדולה ביותר עכשיו, אם זו החתיכת גבינה שהייתה שלישית בגודלה קודם, אז אי-אפשר לבצע עוד חיתוכים לפי מה שאמרנו קודם.

אם זו חתיכה אחרת היא יכלה להגיע מ- או מ-.

נתחיל מלשים לב לדבר הכללי, אם חתכנו חתיכה  ל- אז  ולכן .

במקרה שבו חתיכה של  היא גדולה מ-, בפרט  , בנוסף  כי אחרת לא יכולנו לחתוך אותו, ולכן  וזה סותר את התנאים.

אם חתכנו את  ואז חתיכה של , אז  ובנוסף  כי חתכנו אותו, ולכן  וזו סתירה.

לכן נשאר המקרה שחתכנו את  ואז את , והחתיכה הכי גדולה עכשיו היא חתיכה של , נניח חתכנו את  ל-, אז בפרט  כי חתכנו אותו, בנוסף,  ולכן  כאשר האי-שיווין האחרון נובע מהתנאי. סך הכל קיבלנו  מה שסותר את התנאי.

סך הכל קיבלנו שאי-אפשר לקבל יותר משש חתיכות, ובנוסף בנינו דוגמא לשש חתיכות, ולכן סיימנו.