**4.** נתונה סדרה אינסופית  שמורכבת ממספרים 1 ו-. הוכיחו כי קיימים  ו‑ כך ש-­.

**פתרון.**

נסמן:

 

נשים לב ש- הוא מכפלה של איברים מהסדרה, ולכן הינו אחד או מינוס אחד, לכן, ההפרש של הערכים המוחלטים שלהם גם אחד או מינוס אחד.

נניח בשלילה שאין  עבורם , נטען שבפרט לכל  מתקיים . זה נכון כי אם נגדיל את  כל פעם באחד, אז  ישתנה באחד כל פעם, ישתנה באחד כל פעם, בהתחלה , לכן אם מתישהו נהיה מעל  גם מתישהו נהיה בדיוק ב-, ולכן חייבים תמיד להיות קטנים ממנו.

עכשיו נסתכל על סדרות מהצורה:



זוהי סדרה כלשהי של  אחדים או מינוס אחדים, בפרט יש לה  אפשרויות לסידור, לכן אם נסתכל על  יהיו שם שתי סדרות שהן אותו דבר בדיוק (כי יש יותר סדרות מאשר אפשרויות). נניח זה קורה עבור , נבחר את ה- מהשאלה להיות .

נשים לב לדבר המגניב הבא, כאשר  :



מכיוון ש- לפי הבחירה של , וכל שאר האיברים מצטמצמים.

מכאן נובע ש:



ולכן:





וכך הלאה עד:



מכיוון ש- נקבל ש:

 זו סתירה, ולכן סיימנו.