7. בשיקגו חיים 36 גנגסטרים, חלק מהם אויבים אחד של השני. כל גנגסטר הוא חבר במספר כנופיות, כאשר לכל שתי כנופיות שונות יש הרכב שונה. נתון ששני חברים באותה כנופיה הם לא אויבים, אבל אם גנגסטר כלשהו אינו חבר בכנופיה מסוימת, אז הוא אויב של לפחות אחד מחברי הכנופיה. מצאו את המספר הגדול ביותר האפשרי של כנופיות בשיקגו.

תשובה. .

**פתרון.** נתבונן במצב של הכי הרבה כנופיות.

אם יש שני גנגסטרים שהם לא חברים, A ו-B, נבדוק בכמה כנופיות כל אחד מהם שייך. כמובן, אלה כנופיות שונות. אז אם B משתתף ביותר כנופיות מאשר A, אפשר להחליף את A בהעתק של B, כלומר להרוג את A ולהביא גנגסטר אחר שהוא חבר של כל החברים של B (אבל לא של B), ואויב של כל האויבים של B, ועל כנופיה שמכילה את B אפשר ליצור כנופיה חדשה כזאת, רק בלי B ועם הגנגסטר החדש במקומו. בכך נגדיל את כמות הכנופיות, בסתירה להנחה.

גם אם A משתתף ביותר כנופיות מאשר B אפשר להגדיל את כמות הכנופיות באופן דומה, ואז שוב נגיע לסתירה.

לכן כל שני גנגסטרים שהם אויבים משתתפים באותה כמות של כנופיות. עדיין לכל שני גנגסטרים שהם לא חברים אפשר לעשות פעולה מהסוג שתיארנו (להרוג אחד ולהחליף אותו בהעתק מדויק של השני), אבל זה לא ישנה את כמות הכנופיות – אם זה יגדיל או יקטין, אז אפשר גם להגדיל, ואז כמות הכנופיות היא לא מרבית.

נמספר את הגנגסטרים מ-1 עד 36. נשתדל למצוא גנגסטר A עם מספר הקטן ביותר שלא חבר של גנגסטר B עם מספר סידורי נמוך יותר; נהרוג אותו ונחליף אותו בגנגסטר שמתנהג בדיוק כמו B. לאחר 35 פעולות כאלה נגיע למצב, שלכל שני גנגסטרים שהם אויבים יש אותם חברים. כלומר הגנגסטרים מתחלקים למחלקות, כך שבכל מחלקה כולם אויבים וגנגסטרים ממחלקות שונות הם אויבים.

אם גדלי המחלקות  אז  וכל כנופיה מכילה בדיוק נציג אחד מכל מחלקה, לכן כמות הכנופיות היא . נשארנו עם שאלה חשבונית: בהנחה שמספרים טבעיים מקיימים , צריכים למצוא את המקסימום של .

אם  אז כדאי לאחד מחלקה זאת אם מחלקה אחרת: הסכום לא ישתנה, והמכפלה תגדל. אם , אפשרי לחלק את המחלקה הזאת למחלקה בגודל 2 ומחלקה בגודל , הרי . המכפלה אפילו תגדל אם , ולא תשתנה אם . לכן ניתן להניח שכל המחלקות הן בגודל 2 או 3. מכיוון שהסכום מתחלק ב-3, מספר המחלקות בגודל 2 מתחלק ב-3. אבל , לכן עדיף תמיד להחליף שלוש מחלקות של 2 בשתי מחלקות של 3. לכן במצב הטוב ביותר יש רק מחלקות של 3, וזה נותר  כנופיות.