**6.** עבור אילו ערכים טבעיים של , לכל מספר שלם  שמקיים  קיימת כפולה של  שסכום ספרותיה ?

תשובה. לכל  שלא מתחלק ב-3.

**פתרון.** ברור שאם  מתחלק ב-3 ו- לא, אין סיכוי למצוא מספר שסכום ספרותיו  שמתחלק ב‑ ולכן גם ב-3.

נותר להראות שכאשר  לא מתחלק ב-3, אין בעיה למצוא מספר כזה. מספיק להראות את זה עבור מספרים שזרים ל-10. אכן, כל מספר  ניתן להציג בתור  כאשר  זר ל-10, ו- הוא מחלק של  . אם פתרנו את השאלה עבור  אז אפשר למצוא מספר שסכום ספרותיו  והוא מתחלק ב-, ואם נוסיף למספר זה  אפסים מימין, נקבל מספר שמתחלק גם ב- וסכום ספרותיו עדיין .

ובכן, מעכשיו  לא מתחלק ב-2, לא ב-5 ולא ב-3. כידוע, שאריות של  בחלוקה ל- הם מחזוריים עם מחזור . יחד עם זאת שארית החלוקה של 10 ב- שונה מ-1, אחרת  הוא מחלק של 9, ואז הוא 9 או 3 וזה לא המקרה שלנו.

ובכן, מבחינת חלוקה ב- אין הבדל בין ספרה במקום  לספרה במקום . אנחנו ננסה למצוא שני מספרים  כך ש- מתחלק ב-, ובנוסף . אם נצליח למצוא כזה מספר, נוכל גם לפתור את השאלה: נשים בספרה ימנית, ספרה  מימין, ספרה  מימין וכך הלאה ספרות שסכומם , ובספרה שנייה מימין, ספרה , ספרה  מימין וכך הלאה ספרות שסכומן , ואז סכום הספרות יהיה  והמספר יתחלק ב-.

נזכור, ש-.

אם רוצים לפתור משוואה  כאשר , זה כמו לפתור . היות ו- זר ל-9, מותר לחלק ב- מודולו .לכן קיים  שמקיים את זה. לכן קיים גם . לכן המספרים שאנחנו מחפשים קיימים.