**7. א.** קבוצת אנשים השתתפה בסקר המורכב מ-20 שאלות אמריקאיות, עם שתי תשובות לכל שאלה. התברר כי לכל 10 שאלות שנבחר, ולכל צירוף תשובות אפשריות לשאלות אלו, קיים אדם שענה בדיוק את התשובות הללו ל-10 השאלות. האם בהכרח קיימים שני אנשים שענו תשובות שונות אחד מהשני לכל אחת מ-20 השאלות?

**ב.** אותה השאלה, אבל עכשיו לכל שאלה יש 12 תשובות אפשריות.

תשובה. א. לא. ב. כן.

**פתרון. א.** נניח ללא הגבלת הכלליות שהתשובות האפשריות הן "כן" ו"לא".

**דוגמא ראשונה.** נתבונן בכל הסדרות האפשריות של תשובות ל-20 השאלות שבהן כמות הפעמים שמופיעה התשובה "כן" מתחלקת ב-3. לכל סדרה כזו נייצר אדם שענה את התשובות האלה לשאלות. נראה שקבוצת אנשים זו מקיימת את התנאי של השאלה. אכן, לכל 10 שאלות שנבחר ולכל צירוף של תשובות לשאלות אלו, נתבונן בכמות התשובות שהן "כן" מבין התשובות האלה. אפשר להוסיף לה מספר שהוא 0, 1, או 2 כדי שהיא תתחלק ב-3, ולכן נוכל לבחור תשובות לעשר השאלות האחרות כך שהכמות הכוללת של תשובות "כן" תתחלק ב-3. לכן יש אדם בקבוצה שענה את התשובות הנתונות לעשר השאלות.

כעת, נניח בשלילה שיש שני אנשים שענו תשובות שונות לכל אחת מהשאלות. אז על כל שאלה בדיוק אחד מהם ענה "כן", ולכן ביחד הם ענו 20 תשובות "כן". אבל כל אחד מהם ענה כמות תשובות "כן" שמתחלקת ב-3, ו-20 לא מתחלק ב-3. סתירה. לכן הקבוצה מקיימת את התנאי בשאלה.

**דוגמא שנייה.** נתבונן בכל הסדרות האפשריות של תשובות ל-20 השאלות שבהן התשובה "כן" מופיע 9 פעמים, ובנוסף בסדרת התשובות שכולן "כן". לכל סדרה נייצר אדם שענה את התשובות האלה לשאלות. נראה שקבוצת אנשים זו מקיימת את התנאי של השאלה. אכן, לכל 10 שאלות שנבחר ולכל צירוף של תשובות לשאלות אלו, אם כולן "כן" אז האדם שמתאים לסדרה שכולה "כן" ענה את התשובות הדרושות לשאלות הללו. אחרת, יש שם לכל היותר תשע תשובות "כן", לכן אפשר לבחור את עשר התשובות האחרות כך שהכמות הכוללת של תשובות "כן" תהיה בדיוק תשע. לכן אפשר למצוא אדם שענה את התשובות הדרושות לשאלות הללו.

כעת, כמו שראינו קודם, אם שני אנשים ענו תשובות הפוכות בכל שאלה, הם ענו ביחד 20 תשובות "כן". אבל זה לא ייתכן, כי כל אדם ענה או 9 או 20 תשובות "כן".

**ב.** נניח ללא הגבלת הכלליות שהתשובות האפשריות הן 1,2,…,12. לפי הנתון, יש אדם בקבוצה שענה 1 על עשר השאלות הראשונות. נקרא לו אדם מספר 1. באופן דומה נגדיר אדם מספר 2, אדם מספר 3, וכן הלאה עד אדם מספר 11. כעת לכל אחד מהאנשים נרשום את התשובה ה-11 שלו. נקבל 11 מספרים, ולכן נוכל למצוא מספר מבין 1,2,…,12 ששונה מכולם. נרשום אותו. נעשה אותו דבר לתשובות הבאות (מ-12 עד 20). נקבל סך הכל עשרה מספרים. אז יש אדם שענה את המספרים הללו לשאלות 11,…,20 (בהתאמה). נשים לב שלפי הבנייה, התשובה של אותו אדם לשאלה ה-11 שונה מהתשובות של שאר האנשים לשאלה ה-11, וכך גם לשאר השאלות הבאות. נשים לב שמבין עשר התשובות הראשונות של אותו אדם יש לכל היותר עשרה מספרים שונים, ולכן יש מספר בין 1 ל-11 שלא מופיע ביניהן. אז האדם שזהו מספרו בבירור שונה בתשובותיו מהאדם שלנו בכל אחת מעשר השאלות הראשונות, וכמו שראינו קודם גם בעשר התשובות האחרונות הוא שונה מהאדם שלנו. לכן מצאנו שני אנשים שענו תשובות שונות על כל השאלות. מש"ל.