**3.** חותכים משולש שרירותי למשולשים חופפים באמצעות שרים אשר מקבילים לצדדים של המשולש המקורי (ראו ציור). הוכיחו כי נקודות מפגשי הגבהים של ששת המשולשים המושחרים נמצאות על מעגל אחד.

**פתרון.** נתבונן בששת המשולשים הלבנים שנמצאים בין המשולשים המושחרים ונסמן את הקודקוד המשותף שלהם ב-T. נוכיח שששת מפגשי הגבהים של המשולשים המושחרים נמצאים על מעגל שמרכזו ב-T.

**הוכחה ראשונה.** נתבונן בשני משולשים מושחרים סמוכים עם קודקוד משותף A. שני המשולשים האלה חופפים, ושיקוף סביב A מעביר אחד לשני. לכן שיקוף כזה מעביר את נקודות מפגשי הגבהים של שני המשולשים המושחרים אחת לשנייה, ולכן A נמצאת באמצע הקטע בין נקודות אלה. בנוסף, הקטע הזה הוא למעשה הגובה מ-A במשולשים הללו, ולכן מאונך ל-TA (משום שהצלע הנגדית ל-A בכל אחד מהמשולשים מקבילה ל-TA). לכן TA הוא אנך אמצעי לקטע בין שתי נקודות מפגשי הגבהים, כלומר המרחקים מ-T לזוג נקודות אלה שווים. באופן דומה נקבל כי המרחק מ-T לכל זוג נקודות מפגשי גבהים של משולשים סמוכים שווה, ולכן המרחק של T מכל ששת נקודות מפגשי הגבהים שווה, כלומר הן נמצאות על מעגל שמרכזו ב-T. מש"ל.

**הוכחה שנייה.** ניקח משולש מושחר ונתבונן בשלושת המשולשים הלבנים הסמוכים לו. ביחד הם יוצרים משולש הגדול פי שניים מהמשולש המושחר, שאחד מקודקודיו הוא T. נשים לב שהגבהים של המשולש המושחר מאונכים לצלעות המשולש הגדול, כי צלעות המשולשים מקבילות, וקודקודיו נמצאים באמצעי הצלעות של המשולש הגדול. לכן מפגש הגבהים של המשולש המושחר, נקרא לו H, הוא מרכז המעגל החוסם של המשולש הגדול. כלומר המרחק בין T ל-H הוא רדיוס המעגל החוסם של המשולש הגדול, ששווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם של המשולש הקטן. משום שכל המשולשים השחורים חופפים, יש להם אותו רדיוס מעגל חוסם, כלומר המרחק מ-T לנקודות מפגשי הגבהים שלהם שווה. מש"ל.

**T**

**A**