**7.** מספר סופי של צפרדעים יושבות בנקודות שלמות שונות על הישר הממשי. בכל מהלך צפרדע אחת בדיוק קופצת 1 ימינה, ואסור לצפרדע לקפוץ לנקודה בה יושבת צפרדע אחרת. סופרים את כמות הדרכים השונות בהן הצפרדעים יכולות לבצע את  המהלכים הראשונים (עבור סידור התחלתי מסוים). הוכיחו כי אם בכל מהלך לצפרדעים היה מותר לקפוץ 1 שמאלה ואסור לקפוץ ימינה, מספר הדרכים לבצע את  המהלכים הראשונים מאותו סידור התחלתי לא היה משתנה.

**פתרון.** לכל רשימה של מצבי צפרדעים X (מותר שמצבים ברשימה יופיעו יותר מפעם אחת) נגדיר רשימה של מצבי צפרדעים  באופן הבא: ניקח כל מצב ברשימה, ונרשום את כל המצבים שמתקבלים ממנו כאשר אחת הצפרדעים תקפוץ 1 ימינה (ולא על צפרדע אחר). באופן דומה נגדיר , אבל הקפיצות הם שמאלה ולא ימינה. אנחנו נגיד ששתי רשימות זהות, אם בשתי הרשימות יש אותם מצבים, אבל אולי בסדר אחר, וכל מצב אותה כמות של פעמים.

סימון נוסף:  זה כמות מצבי הצפרדעים ברשימה X.

השאיפה שלנו היא להוכיח כי .

ההוכחה מבוססת על שתי טענות פשוטות:

**טענה 1.** לכל רשימה X מתקיים 

**טענה 2.** לכל רשימה X מתקיים .

משתי הטענות ההוכחה מתקבלת בקלות



נשאר להוכיח את הטענות. מספיק לבדוק כל טענה עבור רשימה של מצב צפרדעים בודד.

**הוכחת טענה 1.** כמות הדרכים לעשות מהלך שמאלה מכל מצב שווה לכמות רצפי הצפרדעים, כי בכל רצף רק הצפרדע השמאלי יוכל לצעוד שמאלה. כמות הדרכים לעשות מהלך ימינה גם שווה לכמות הרצפים. לכן .

**הוכחת טענה 2.** צריכים לחשוב על כל המצבים האפשריים כאשר עושים קפיצה אחת שמאלה ולאחר מכן קפיצה אחת ימינה. נחלק לשני מקרים או שהקפיצות הן באמצעות אותו צפרדע, או שהקפיצות באמצעות צפרדעים שונים. אם זה באמצעות אותו צפרדע, אז מקבלים את המצב המקורי; מקבלים אותו במספר דרכים שונות, שהמספר הוא כמות הרצפים.

אם חושבים על מצבים שמתקבלים מקפיצה ימינה ואז קפיצה שמאלה, אז מקבלים שוב את המצב המקורי אותה כמות של פעמים, וגם אותם המצבים כאשר הקפיצות הן של צפרדעים שונות (פשוט הקפיצות הן בסדר הפוך).