**6.** אבי ובני משחקים במשחק הבא. ראשית, אבי ממציא פולינום  בעל מקדמים שלמים. לאחר מכן בני מבצע מספר מהלכים: בכל מהלך בני בוחר מספר שלם  שלא נבחר קודם, ואבי אומר בקול כמה פתרונות במספרים שלמים יש למשוואה . על כל מהלך בני משלם לאבי שקל אחד. בני מנצח כאשר אבי חוזר על מספר שאמר לפני כן, לא בהכרח ברצף. מה המספר המינימלי של שקלים שבני צריך כדי לנצח בוודאות?

**תשובה.** 4.

**פתרון.** נניח כי בני בחר רק 3 מספרים: , באיזשהו סדר. נניח כי . יתכן שהפולינום של אבי הוא . אז למשוואה  יש פתרון אחד בלבד (), למשוואה  יש שני פתרונות (), ולמשוואה  אין פתרונות, לכן התשובות שאבי ייתן הם 2, 0, 1. כלומר אם בני שילם רק 3 שקלים, יתכן שהמשחק לא הסתיים.

נציג שיטה עבור בני לסיים את המשחק ב-4 מהלכים. נניח שבני יבחר 4 מספרים ברצף, כמו למשל 0,1,2,3, כלומר יברר את מספרי הפתרונות עבור , , , .

אם הוא לא ניצח, אז המספר הכי גדול שנאמר הוא לפחות 3, והמספר השני הכי גדול שנאמר הוא לפחות 2. כלומר לפולינום  יש לפחות 3 שורשים שלמים שונים, ולפולינום  יש לפחות 2 שורשים, כאשר . לפולינום  יש 3 שורשים שלמים שונים  ואולי גם עוד, בכל מקרה ניתן לכתוב .

לפולינום  יש לפחות 2 שורשים שלמים , ומתקיים , לכן  מתחלק במכפלה של 3 מספרים שלמים שונים: . אבל , לכן המחלקים השלמים היחידים שיש לו הם . לכן מבין המספרים  חייבים להיות  ובנוסף גם  או . לה"כ , ובנוסף , לכן



כלומר  צריכים להיות ברצף בסדר זה. ולכן גם .

כעת נשכלל את השיטה של בני. הוא יתחיל מלהגיד 1, אם התשובה של אבי תהיה 2 או יותר הוא ישאל גם על 0, 1, 3, ואם התשובה תהיה 0 או 1 הוא ישאל לגבי 2, 3, 4. אז המקרה שבו  פשוט לא יתכן.